

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**FERNANDO HENRIQUE SANTOS ELEUTÉRIO**

**A SUPERCONDUTIVIDADE E O FORMALISMO DE NAMBU**

VITÓRIA  
2013

FERNANDO HENRIQUE SANTOS ELEUTÉRIO

**A SUPERCONDUTIVIDADE E O FORMALISMO DE NAMBU**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, do Centro de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Humberto Belich Jr.

VITÓRIA  
2013

## FICHA CATALOGRÁFICA

## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, o Sr. Francisco Eleutério Neto e a Sra. Célia Meire Santos Eleutério, em forma de gratidão pelo amor incondicional que possibilitou mais essa conquista. E aos meus irmãos, Felipe Santos Eleutério e Fernanda Santos Eleutério.

## AGRADECIMENTOS

Venho agradecer primeiramente a Deus, por me conceder saúde, sabedoria e paciência.

Agradeço também a todas as pessoas que diretamente me forneceram subsídios pra realização desse trabalho:

Ao professor Dr. Humberto Belich pela orientação nos últimos dois anos.

Aos Mestres e aos colegas do Grupo de Física Aplicada, pelo suporte.

Aos colegas de pós-graduação da UFES, em especial, aos amigos Fernando Néspoli Nassar Pansini e Fábio Arthur Leão de Souza.

Ao meu amigo Alexandre Madeira.

A agência de fomento: CAPES, por fornecer subsídios financeiros para realização deste trabalho.

Ao programa de pós-graduação em física da Universidade Federal do Espírito Santo.

E por último, mas não menos importante, à minha irmã, Fernanda Santos Eleutério, por melhorar significativamente este trabalho.

"Ninguém pode voltar atrás e fazer um novo começo. Mas qualquer um pode recomeçar e fazer um novo fim."

*Francisco de Paula Cândido Xavier*

## RESUMO

Neste trabalho foi realizado um estudo da transição de fase supercondutora, no qual delinea a termodinâmica envolvida numa descrição de campo médio (parâmetro de ordem). O modelo de Landau-Ginzburg, para descrever a termodinâmica envolvendo a transição de fase, utiliza um funcional dependente do parâmetro de ordem. A energia livre dada em função deste parâmetro fornece os elementos essenciais para se extrair o comportamento da entropia, calor específico e o número de superelétrons. Contudo, este modelo não explica como o par de elétrons consegue superar a energia de repulsão Coulombiana e se estabilizar. Usando o formalismo de Nambu é possível expor como isto ocorre. Por outro lado, as cerâmicas supercondutoras (ex. Hg, Re-1223, estudada no grupo de Física Aplicada da UFES), são constituídas de grãos interpenetrantes que formam um conjunto de microjunções Josephson (os “weak-links”). Sendo assim podem-se usar os conceitos deste tipo de junção para apresentar os processos físicos microscópicos envolvidos nos supercondutores de altas temperaturas. Por fim na dissertação descreve-se a formação deste tipo de junção.



## ABSTRACT

In this paper we presented a study of the superconducting phase transition, which outlines the thermodynamics involved in a description of the mean field (order parameter). The Ginzburg-Landau model uses an order-parameter-dependent functional to describe the thermodynamic phase transition involving. The free energy function given in terms of this parameter provides the essential elements to extract the behavior of entropy, specific heat, and the number of superelectrons. However, this model does not explain how the pair of electrons can overcome the Coulomb repulsion energy and stabilize. Using the formalism of Nambu it is possible to expose how this occurs. On the other hand, the superconducting ceramics (eg, Hg, Re-1223, studied at the Group of Applied Physics UFES) consist of grains that form an interpenetrating set Josephson microjunction (the "weak-link"). Thus one can use the concepts in this type of join to present the microscopic physical processes involved in high-temperature superconductors. Finally, in this thesis one describes the formation of this type of joint.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Gráfico da resistência elétrica do mercúrio em função da sua temperatura .....	15
Figura 2: Gráfico de resistividade elétrica em função da temperatura para metais normais e para supercondutores.....	16
Figura 3: Ímã Flutuante .....	17
Figura 4: Comportamento do condutor perfeito em função de um campo magnético. (a) inicialmente em campo magnético zero. (b) inicialmente em campo magnético diferente de zero. ....	18
Figura 5: Efeito Meissner para uma amostra supercondutora. (a) inicialmente em campo magnético zero. (b) inicialmente em campo magnético diferente de zero. ....	18
Figura 6: Comportamento do campo magnético no interior de uma amostra supercondutora semi-infinita. ....	27
Figura 7: Amostra supercondutora no interior de um solenoide.....	29
Figura 8: Diagrama de fase para o supercondutor do Tipo I .....	33
Figura 9: Gráfico para análise da diferença de densidade livre de energia em função do parâmetro de ordem.....	37
Figura 10: Diferença de densidade livre de energia em função do parâmetro de ordem, para C positivo. ....	37
Figura 11: “Chapéu Mexicano”. Diferença de densidade livre de energia em função do parâmetro de ordem, para C negativo.....	38
Figura 12: Interação entre eletros através de fônons. ....	48
Figura 13: Formação dos pares de Cooper.....	51
Figura 14: Formação de quase-partícula tipo elétron e quase-partícula tipo buraco.....	52

Figura 15: Junções Josephson a) S-I-S b) Tipo S-N-S c) Ponto de contato d) Tipo microponete.....	53
Figura 16: Gráfico da corrente de tunelamento por uma diferença de potencial para dois supercondutores distintos .....	58
Figura 17: Tunelamento da quase-partícula.....	58
Figura 18: Junção Josephson ( $SL - I - SR$ ).....	59

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Exemplos de elementos químicos que apresentam o estado supercondutor e suas respectivas temperaturas críticas. ....	16
Tabela 2: Exemplos de supercondutores de alta temperatura com as suas respectivas temperaturas críticas.....	20

# SUMÁRIO

FICHA CATALOGRÁFICA .....	iii
FOLHA DE APROVAÇÃO.....	iv
DEDICATÓRIA.....	v
AGRADECIMENTOS .....	vi
RESUMO.....	viii
ABSTRACT .....	ix
LISTA DE FIGURAS .....	x
LISTA DE TABELAS .....	xii
1. INTRODUÇÃO.....	15
2. TEORIA DOS IRMÃOS LONDON (1935).....	22
3. TEORIA DE GINZBURG-LANDAU (1950).....	29
3.1 Sistema Homogêneo .....	35
3.2 Sistema Não Homogêneo.....	38
4. TEORIA BCS (1957), UMA VISÃO MICROSCÓPICA DA SUPERCONDUTIVIDADE .....	46
4.1 Interação Efetiva Elétron-Elétron e os Pares de Cooper. ....	46
4.2 Solução Canônica para a Teoria BCS .....	48
4.2.1 Transformação de Bogoliubov e Valantin.....	50
5. INTRODUÇÃO A JUNÇÕES JOSEPHSON .....	53
5.1 Transformação de Calibre e a Densidade de Corrente Supercondutora .....	53

5.2 Corrente De Tunelamento .....	56
5.3 As Equações De Josephson .....	58
6. CONCLUSÕES .....	62
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	64

# 1. INTRODUÇÃO

Para completo e correto entendimento do estudo deste trabalho é preciso primeiramente se familiarizar com alguns conceitos.

Heike Kammerling Onnes (ONNES, 1911), físico holandês, em 1911 descobriu a supercondutividade usando o mercúrio (Hg). Quando Onnes tentava compreender a dependência da resistência elétrica em função da temperatura em metais, observou que a resistência elétrica do mercúrio caía abruptamente para zero a 4,19K. Como é ilustrado na Figura 1: Gráfico da resistência elétrica do mercúrio em função da sua temperatura.

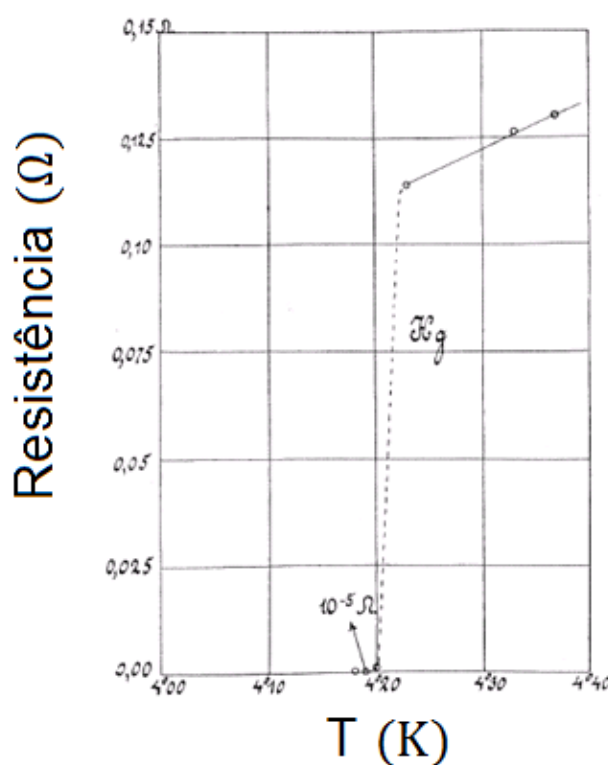


Figura 1: Gráfico da resistência elétrica do mercúrio em função da sua temperatura (ONNES, 1911).

Posteriormente constata-se, assim como para o mercúrio, que os materiais supercondutores resfriados abaixo de uma temperatura específica, denominada temperatura crítica ( $T_C$ ), apresentam resistividade nula. Este comportamento anômalo (se partir do ponto de vista da aproximação de elétrons independentes) ficou conhecido como estado supercondutor.

Na tabela a seguir apresentam-se alguns exemplos de elementos que apresentam supercondutividade:

Tabela 1: Exemplos de elementos químicos que apresentam o estado supercondutor e suas respectivas temperaturas críticas.

Substância	$T_c$ (K)	
Al	1.2	
Hg	4.1	Primeiro supercondutor descoberto (1911)
Nb	9.3	$T_c$ mais elevada de um elemento a pressão normal
Pb	7.2	
Sn	3.7	
Ti	0.39	
Tl	2.4	
V	5.3	
W	0.01	
Zn	0.88	
Zr	0.65	

(com base em ANNET, 2003).

A resistividade elétrica em função da temperatura para um metal normal é dada por (ASHCROFT, 2011):

$$\rho(T) = \rho_0 + BT^5,^* \quad 1.1$$

\*foram desconsideradas impurezas magnéticas.

Sendo que  $\rho_0$  é a resistividade proveniente dos espalhamentos causados pelas impurezas e pelos defeitos e o segundo termo vem do espalhamento de fônons.

Analisando a equação (1.1) conclui-se que para metais normais a resistividade elétrica atinge um valor residual quando a temperatura tende a zero. Em contrapartida, quando esse metal é supercondutor a eq. (1.1) só é válida para temperaturas acima da temperatura crítica, isto porque abaixo de  $T_c$  a resistividade é nula. A figura 2 traz um gráfico exemplificado este fato.

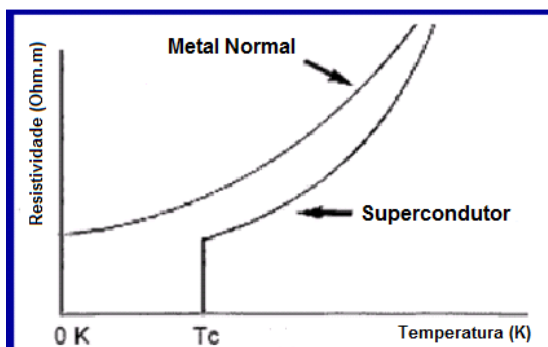


Figura 2: Gráfico de resistividade elétrica em função da temperatura para metais normais e para supercondutores (Com base em ASHCROFT, 2011).



A supercondutividade foi associada à condutividade perfeita até 1933. Porém esta associação deixou de existir. Neste ano os físicos W. Meissner e R. Ochsenfeld descobriram uma característica mais fundamental para a supercondutividade, que consistia no diamagnetismo perfeito (blindagem magnética). Este fenômeno foi denominado de efeito Meissner-Ochsenfeld em homenagem aos seus descobridores (MEISSNER E OCHSENFELD, 1933).

Um exemplo clássico do efeito Meissner, refere-se em fazer um ímã permanente flutuar sobre a superfície de um supercondutor. Sabe-se que:

$$\vec{B} = (\vec{H} + \vec{M})\mu_0, \quad 1.2$$

no entanto, quando se aplica um campo magnético sobre a amostra supercondutora, surgem nela correntes de superfícies que irão produzir um campo de mesmo módulo, mesma direção, mas de sentido oposto, tornando o campo magnético ( $\vec{B}$ ) nulo no interior do espécime. Este fato implica dizer que:

$$\vec{M} = -\vec{H}. \quad 1.3$$

Com isso o supercondutor então passa a se comportar como se fosse outro ímã, idêntico ao ímã permanente, fazendo com que ele sofra uma repulsão que compensa seu peso e, portanto "levite" sobre o supercondutor, conforme a Figura 3: Ímã Flutuante.

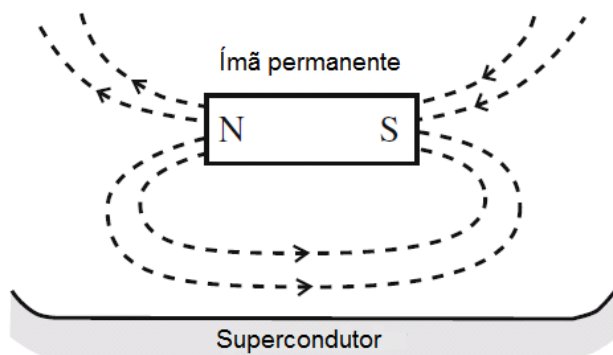


Figura 3: Ímã Flutuante  
(FUJITA, ITO e GODOY, 2009).

O fenômeno da blindagem magnética não provém da condutividade perfeita. Isto porque um condutor perfeito inicialmente em campo magnético zero, ao aplicar um campo, surge uma corrente de superfície que anula este. Porém quando um campo é estabelecido na amostra, ao tirá-lo, aparecerá uma corrente para manter esse campo magnético, aprisionando-o. Já no supercondutor para os dois casos haverá a blindagem do campo magnético, e por consequência o campo será nulo no interior da amostra. Como é ilustrado na Figura 4: Comportamento do condutor

perfeito em função de um campo magnético. E na Figura 5: Efeito Meissner para uma amostra supercondutora.

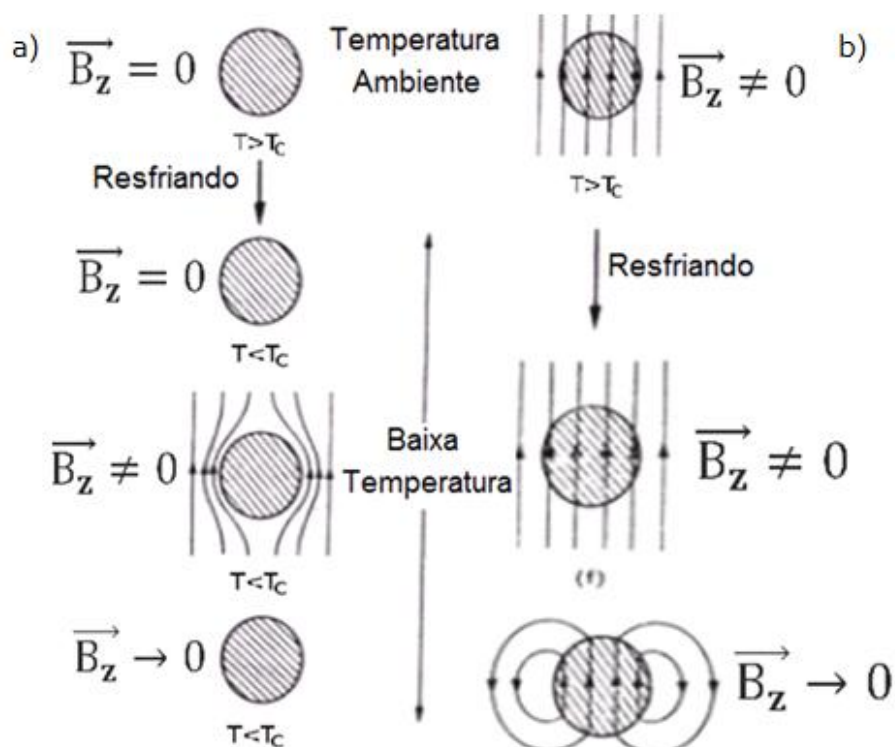


Figura 4: Comportamento do condutor perfeito em função de um campo magnético. (a) inicialmente em campo magnético zero. (b) inicialmente em campo magnético diferente de zero. (ROSE-INNES, 1988)

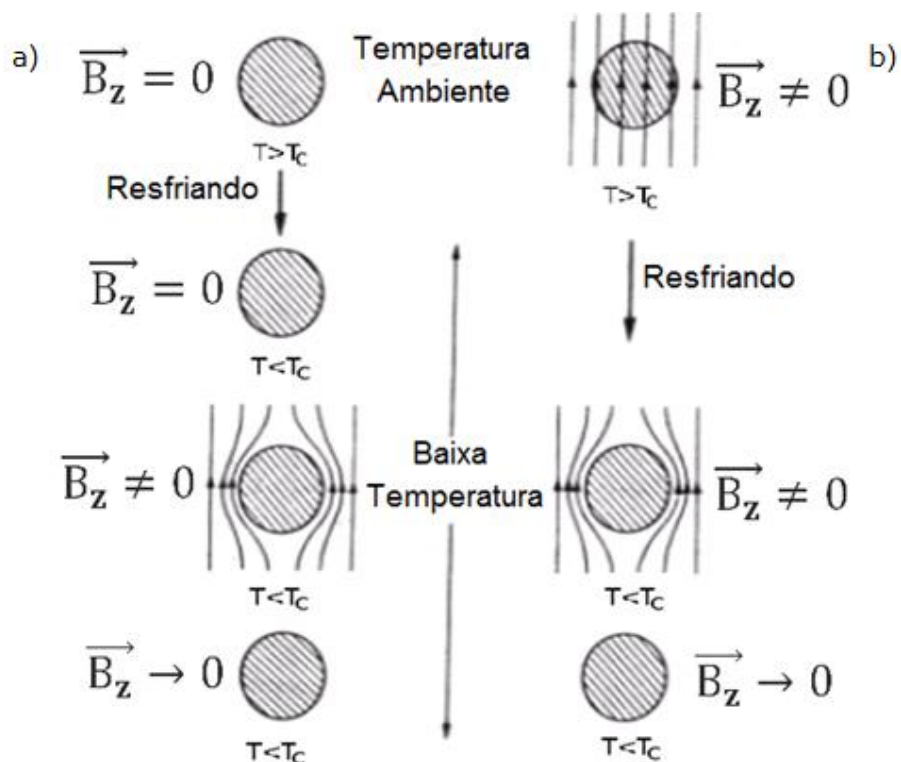


Figura 5: Efeito Meissner para uma amostra supercondutora. (a) inicialmente em campo magnético zero. (b) inicialmente em campo magnético diferente de zero. (ROSE-INNES, 1988)

Observou-se ainda que a temperatura crítica de um supercondutor diminuía quando se aumentava o campo magnético aplicado na amostra. Este aumento ao sobrepor certo valor limite, faz com que a espécie deixe de estar no estado supercondutor. Atribui-se a este valor limite a denominação de campo crítico ( $\overrightarrow{H_C}$ ).

Dois anos depois da descoberta de W. Meissner e R. Ochsenfeld, os irmãos London criaram uma teoria fenomenológica baseada no eletromagnetismo clássico para explicar essas características dos supercondutores citadas anteriormente (LONDON e LONDON, 1935).

Ginzburg e Landau (GINZBURG, LANDAU, 1950) em 1950 elaboraram uma teoria alicerçada nos conceitos da termodinâmica para explicar a transição de fase supercondutora. Esta teoria é considerada mais abrangente que a dos irmãos London, pois além de salientar vários parâmetros macroscópicos da supercondutividade, é possível por intermédio da minimização do funcional de energia, encontrar naturalmente as equações de London.

Em 1956 Bardeen, Cooper e Schieffer propuseram uma teoria microscópica para a supercondutividade, a teoria BCS. Esta teoria considera a interação entre elétrons formando um par, os pares de Cooper. Além disso, ela abrange como seu limite macroscópico (GOR'KOV, 1959), as teorias de Ginzburga-Landau e consequentemente a de London.

Já em 1986 houve um avanço significativo para o desenvolvimento da supercondutividade. Isto porque, foi a partir desse ano que descobriu os óxidos cerâmicos supercondutores, os quais geralmente são semicondutores a temperatura ambiente, mas tornam-se supercondutores com temperaturas críticas acima de 77K. Essa temperatura corresponde a de liquefação do nitrogênio, que é um líquido muito mais fácil de ser obtido do que o líquido de hélio. Estes supercondutores foram denominados de supercondutores de alta temperatura. Na Tabela 2: Exemplos de supercondutores de alta temperatura com as suas respectivas temperaturas críticas e seus anos de descobrimento.

Buscar a compreensão dos fenômenos da natureza é uma característica intrínseca do ser humano. A física é uma das ciências que elabora modelagens para tentar descrever a natureza. Quando há constatação de um novo fenômeno, surge a necessidade da criação de modelos que o compreenda. Nessa procura por conhecimento, podem surgir fatos que ainda não tinham sido observados ou ainda não foram entendidos, gerando assim uma carência de explicações. Pensando nisso

e tendo em vista a importância na física e as aplicações práticas, despertou-se o interesse em estudar sobre as teorias que modelam a supercondutividade, externando discussões abordadas no grupo de física aplicada.

Tabela 2: Exemplos de supercondutores de alta temperatura com as suas respectivas temperaturas críticas.

(com base em POOLE, 1995)

Composto	$T_c$ (K)	Ano
$Ba_xLa_{5-x}Cu_5O_y$	30-35	1986
$(Ba_{0,1}La_{0,9})Cu_{4+d}$ com pressão 1 GPa	52	1986
$YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$	92	1987
$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$	110	1988
$Tl_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$	125	1988
$Tl_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$ com pressão de 7 GPa	131	1993
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+d}$	133	1993
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+d}$ com pressão 25 GPa	155	1993
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+d}$ com pressão 30 GPa	164	1994
$(Hg_{0,8}Pb_{0,2})Ba_2Ca_2Cu_3O_{8+d}$	134	1994
$(Hg_{0,8}Re_{0,2})Ba_2Ca_2Cu_3O_{8+d}$	134	1995
$MgB_2$	40	2001

Estas teorias estarão desmembradas em quatro capítulos. O capítulo 2 (Teoria dos irmãos London (1935)) irá explicitar as principais características dos supercondutores, a condutividade perfeita e o efeito Meissner-Ochsenfeld, por intermédio do eletromagnetismo clássico.

Já o capítulo 3 (Teoria de Ginzburg-Landau (1950)) trará uma visão de transição de fase supercondutora. Ela salientará a estabilidade do estado supercondutor e encontrará a generalização das equações de London ao minimizar um funcional de energia.

Estes dois primeiros capítulos abordarão fundamentações que sustentam uma melhor reflexão sobre o tema e fomentarão um embasamento necessário para

a compreensão da descrição quântica microscópica via formalismo de Nambu abordado no Capítulo 4, no qual possibilitará uma nova interpretação da supercondutividade. Através dessa teoria microscópica que será compreendido a formação dos portadores de carga e o surgimento do gap de energia.

Por último no capítulo 5 (Introdução a junções Josephson) irá fazer um iniciação de como a densidade de corrente pode ser descrita em uma associação de supercondutores de baixas temperaturas (menos que 40K), abrindo precedentes para trabalhos futuros, como por exemplos modelar os grãos que constituem as cerâmicas supercondutoras.

## 2. TEORIA DOS IRMÃOS LONDON (1935)

Com a descoberta da supercondutividade pelo professor holandês Heike Kamerlingh Onnes em 1911 (ONNES, 1911) e do efeito Meissner em 1933 pelos físicos, Walther Meissner e Robert Ochsenfeld (MEISSNER e OCHSENFELD, 1933), era preciso criar teorias que explicassem essas novas características de alguns materiais. Na busca desses esclarecimentos em 1934 foi elaborada a Teoria de London.

Os irmãos, Fritz London e Heinz London em 1934 (LONDON e LONDON, 1935), usaram argumentos empíricos para explicar o efeito Meissner. Logo esta teoria é fenomenológica. Esta teoria utiliza as equações de Maxwell e foi inspirada no modelo de dois fluidos, de Hendrik Brugt Gerhard Casimir e Cornelis Jacobus Gorter em 1934 (GORTER e CASIMIR, 1934). Quando parte do pressuposto que nos materiais supercondutores abaixo da temperatura crítica ( $T_c$ ), possuem coexistindo, como uma mistura de fase na termodinâmica, dois tipos de elétrons de condução.

O primeiro tipo denominado de “superelétrons” que não sofrem espalhamentos devido às impurezas e nem pelas vibrações da rede, ou seja, não contribuem para a resistividade elétrica e consequentemente são responsáveis pela supercorrente. O segundo tipo são os elétrons normais, que obedecem à lei de Ohm descrita a seguir (OSTERMANN, FERREIRA e CAVALCANTI, 1998):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \rho \vec{J}(\vec{r}). \quad 2.1$$

Sendo  $\vec{E}(\vec{r})$  é o campo elétrico aplicado,  $\vec{J}(\vec{r})$  é a densidade de corrente elétrica e  $\rho$  é a resistividade elétrica.

Uma amostra supercondutora que possui  $n$  elétrons condutores por unidade de volume, tem desse total uma fração que é responsável pela supercorrente,  $n_s(T)$ , que é a quantidade de superelétrons por unidade de volume e os  $(n - n_s(T))$  restantes, são os elétrons normais por unidade de volume ( $n_n$ ), em que:

$$\begin{cases} n_s \rightarrow n \\ n_n \rightarrow 0 \end{cases} \text{ para } T \ll T_c, \quad 2.2$$

$$\begin{cases} n_n \rightarrow n \\ n_s \rightarrow 0 \end{cases} \text{ para } T \rightarrow T_c. \quad 2.3$$

Ao aplicar um campo magnético em uma amostra supercondutora que não está ligada a uma diferença de potencial, gera um campo elétrico induzido que acelera os superelétrons, uma vez que estes se movimentam sem impedimento. Cada elétron é regido pela equação de movimento do tipo (MACHADO, 2002):

$$m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = -e\vec{E}. \quad 2.4$$

Sendo que “e”, m e  $\vec{v}_s$  são respectivamente, a carga elementar, a massa de um elétron, e a velocidade dos superelétrons.

E se a densidade superficial de corrente é dada pela equação:

$$\vec{J} = -ne\vec{v}_s, \quad 2.5$$

manipulando (2.5) e substituído em (2.4) se obtém:

$$\frac{m}{ne} \frac{d\vec{J}}{dt} = e\vec{E}, \quad 2.6$$

$$\boxed{\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}.} \quad 2.7$$

A equação (2.7) é conhecida como a primeira equação de London, ela descreve a resistividade nula de um supercondutor.

Considerando que os campos elétricos induzidos sobre a amostra supercondutora não variam no tempo (ou variam lentamente), então  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ll \vec{J}$ , logo a corrente de deslocamento pode ser desconsiderada. As equações de Maxwell ficam (ORLANDO e DELIN, 1990):

A variação do Campo magnético no tempo gera campo elétrico.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (Lei de Faraday – Lenz).} \quad 2.8$$

Uma distribuição de carga livre pode gerar um deslocamento elétrico.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \text{ (Lei de Gauss).} \quad 2.9$$

Inobservância do monopolo magnético.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ (Lei de Gauss Magnética).} \quad 2.10$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \text{ (Lei de Ampère).} \quad 2.11$$

Manipulando a eq. (2.7) e substituindo na eq. (2.8):

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{m}{ne^2} \frac{d\vec{J}}{dt} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad 2.12$$

$$\frac{m}{ne^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{J}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad 2.13$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \times \vec{J} + \frac{ne^2}{m} \vec{B} \right) = 0. \quad 2.14$$

O termo entre os parênteses da eq. (2.14) é independente do tempo, logo se pode igualá-lo a uma função vetorial  $\vec{F}(\vec{r})$  que não depende do tempo, mas que pode depender da posição no espaço:

$$\vec{\nabla} \times \vec{J} + \frac{ne^2}{m} \vec{B} = \vec{F}(\vec{r}). \quad 2.15$$

Do eletromagnetismo sabe-se que:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad 2.16$$

aplicando o rotacional da equação (2.16) e usando a Lei de Ampère (2.11):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M}). \quad 2.17$$

As condições de contorno para as componentes dos vetores  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  em uma interface entre duas regiões (meio um e meio dois) de permeabilidades diferentes é dada por:

$$\vec{B}_{\perp 1} = \vec{B}_{\perp 2}, \quad 2.18$$

sendo que  $\vec{B}_{\perp 1}$  e  $\vec{B}_{\perp 2}$  são respectivamente a componente do campo ortogonal a superfície no meio um e a componente do campo ortogonal a superfície no meio dois. Além disso, as componentes tangenciais do campo  $\vec{H}$ , estão relacionada da seguinte maneira (POOLE, 1995):

$$\vec{H}_{\parallel 1} = \vec{H}_{\parallel 2}. \quad 2.19$$

Porém é sabido da literatura que a suscetibilidade magnética é dada por (POOLE, 1995):

$$\chi = \frac{\vec{M}}{\vec{H}}, \quad 2.20$$

Então campos internos e aplicados em meios homogêneos podem ser escritos:

$$B_{in} = \mu_0 H_{in} (1 + \chi) \quad 2.21$$

$$B_{ap} = \mu_0 H_{ap}, \quad 2.22$$

Para amostras com geometrias que podem ser aproximadas por elipsoides (forma comumente usadas em amostras para estudos de propriedades supercondutoras), e usando as condições de contorno (2.19) (POOLE, 1995):

$$H_{in} = H_{ap}. \quad 2.23$$

Das equações (2.21), (2.22) e (2.23) encontra-se:



$$B_{in} = \mu_0 B_{ap}(1 + \chi) \quad 2.24$$

$$H_{in} = \frac{1}{\mu_0} B_{ap}, \quad 2.25$$

$$M = \frac{\chi}{\mu_0} B_{ap}. \quad 2.26$$

Para um supercondutor (que é um diamagnético perfeito, efeito Meissner-Ochsenfeld) a suscetibilidade é:

$$\chi = -1, \quad 2.27$$

então:

$$B_{in} = 0 \quad 2.28$$

$$H_{in} = \frac{1}{\mu_0} B_{ap}, \quad 2.29$$

$$M = -\frac{1}{\mu_0} B_{ap}. \quad 2.30$$

Omitindo o subíndice e escrevendo da forma vetorial:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{H}, \quad 2.31$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad 2.32$$

Substituindo (2.31) na eq. (2.11) e aplicando o rotacional fica:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{J}. \quad 2.33$$

Usando a identidade:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) - \vec{\nabla}^2 \vec{C}. \quad 2.34$$

Esta eq. é válida para qualquer vetor  $\vec{C}$ . Fazendo então para o campo magnético  $\vec{B}$  e usando a eq. (2.10):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{\nabla}^2 \vec{B}, \quad 2.35$$

substituindo (2.35) em (2.33):

$$-\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{J}. \quad 2.36$$

Substituindo (2.36) em (2.15):

$$-\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B} + \frac{ne^2}{m} \vec{B} = \vec{F}(\vec{r}). \quad 2.37$$

A eq. (2.37) é válida tanto para um condutor perfeito idealizado quanto para um supercondutor. Porém, para o segundo existe o efeito Meissner, onde o campo magnético resultante no interior da amostra é nulo. Como  $\vec{F}(\vec{r})$  é uma resposta magnética nesse interior, então para o supercondutor essa resposta é nula:

$$\vec{F}(\vec{r}) = 0. \quad 2.38$$

Esta compatibilização da lei de Faraday-Lenz considerando o efeito Meissner, foi uma das contribuições dos irmãos London, então as eqs. (2.15) e (2.37) ficarão respectivamente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{J} = -\frac{ne^2}{m} \vec{B}, \quad 2.39$$

$$\vec{B} - \frac{m}{ne^2\mu_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0. \quad 2.40$$

A (2.39) é a segunda equação de London.

Agora definindo o comprimento de penetração de London, como sendo:

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{ne^2\mu_0}}. \quad 2.41$$

Note que (2.41) tem unidade de comprimento, de fato:

$$[\lambda_L] = \sqrt{\frac{[m]}{[n][e]^2[\mu_0]}}, \quad 2.42$$

$$[\lambda_L] = \sqrt{\frac{\text{kg}}{(\text{m}^{-3}) \cdot (\text{A}^2 \cdot \text{s}^2) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2})}}, \quad 2.43$$

$$[\lambda_L] = \sqrt{\text{m}^2}, \quad 2.44$$

$$[\lambda_L] = \text{m}. \quad 2.45$$

Perceba também que foi utilizado o Sistema Internacional de Unidades (S.I).

O parâmetro  $\lambda_L$  mede a distância média relevante que o campo magnético penetra em uma amostra supercondutora.

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} \quad 2.46$$

Por fins matemáticos, mas sem perder a generalidade dos resultados suponha que o campo  $\vec{B}$  tenha apenas a componente da direção  $\hat{k}$  e que dependa apenas de  $x$ , então:

$$\vec{B} = \vec{B}(x)\hat{k}. \quad 2.47$$

Logo a eq. (2.46) irá ficar:

$$\frac{d^2 B(x)}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} B(x). \quad 2.48$$

Supondo que o campo seja da forma:

$$B(x) = e^{mx}, \quad 2.49$$

então:

$$m^2 e^{mx} = \frac{1}{\lambda_L^2} e^{mx}, \quad 2.50$$

$$m = \pm \frac{1}{\lambda_L}, \quad 2.51$$

$$B(x) = B_0 e^{-x/\lambda_L} + B_1 e^{x/\lambda_L}. \quad 2.52$$

A constante  $B_1$  é nula, já que o campo magnético tem que ser limitado quando  $x \rightarrow \infty$ .

$$B(x) = B_0 e^{-x/\lambda_L}. \quad 2.53$$

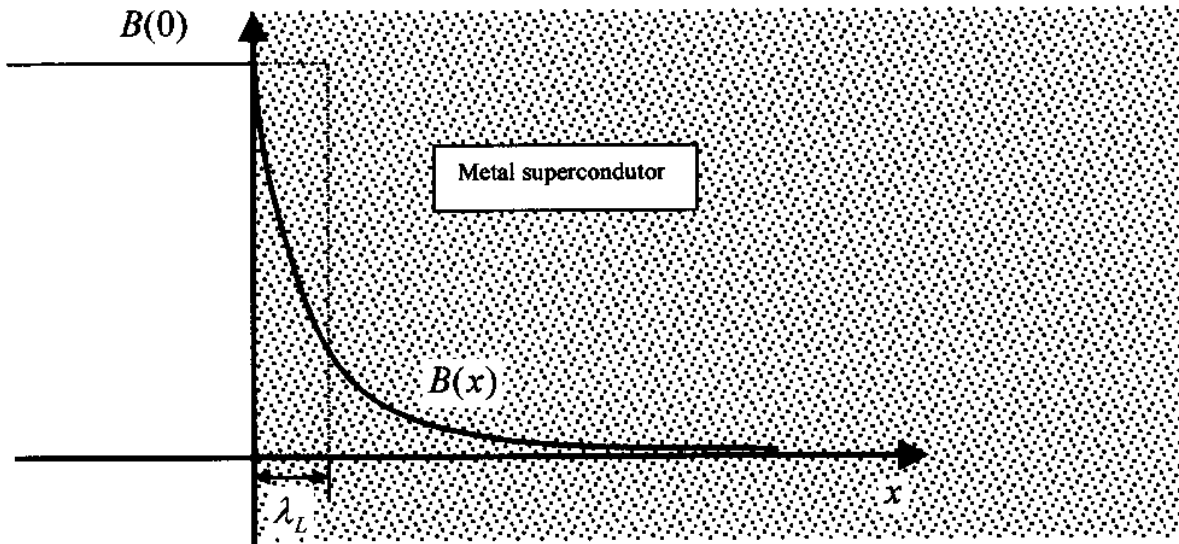


Figura 6: Comportamento do campo magnético no interior de uma amostra supercondutora semi-infinita. (ROSE-INNES, e RHODERECK, 1988)

Analisando a eq. (2.53), constata-se que o campo magnético decresce exponencialmente ao entrar na amostra supercondutora até se tornar nulo em seu interior. Este comportamento descreve o efeito Meissner. E  $\lambda_L$  mede a distância de penetração na qual o campo é apreciável.

Agora usando as equações (2.31) e (2.32) em (2.39):

$$\vec{\nabla} \times \vec{j} = -\frac{ne^2}{m} \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad 2.54$$

Substituindo (2.41) na eq. (2.54) e fazendo a manipulação necessária se chega a:

$$\vec{\nabla} \times (\mu_0 \lambda_L^2 \vec{j} + \vec{A}) = 0, \quad 2.55$$

$$\vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{A} + \vec{\nabla} \phi. \quad 2.56$$

É relevante destacar que a densidade de corrente é diretamente proporcional ao potencial vetor. Aplicando o divergente a eq.(2.56):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \phi, \quad 2.57$$

Como não há fontes de cargas então:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad 2.58$$

e conseqüentemente:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad 2.59$$

Aplicando o rotacional na eq. (2.54) e usando a relação (2.32) e (2.34):

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) - \vec{\nabla}^2 \vec{J} = -\frac{ne^2 \mu_0}{m} \vec{\nabla} \times \vec{H}. \quad 2.60$$

Usando as equações. (2.11), (2.41) e (2.58):

$$\vec{\nabla}^2 \vec{J} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{J}. \quad 2.61$$

Esta eq. indica que a densidade de corrente circula na superfície do supercondutor até uma profundidade  $\lambda_L$ .

As equações da teoria de London descrevem a resistividade elétrica nula e o diamagnetismo perfeito (efeito Meissner) através da teoria clássica do eletromagnetismo, porém estas equações podem ser encontradas a partir de uma teoria desenvolvida anos depois por Ginzburg e Landau. A ideia principal é encontrar o potencial vetor ( $\vec{A}$ ) e o parâmetro de ordem ( $\psi$ ), que minimizem a energia livre. No próximo capítulo será descrito o processo termodinâmico que é responsável pela transição de fase nos supercondutores de baixa temperatura.

### 3. TEORIA DE GINZBURG-LANDAU (1950)

Em 1937 o físico russo Lev Davidovich Landau formulou um modelo baseado em um parâmetro de ordem  $\vec{M}$  (magnetização espontânea), com o intuito de explicar a transição de fase de segunda ordem dos materiais ferromagnéticos. Acima da temperatura de Curie, ou seja, para o estado de desordem, esse parâmetro é nulo e abaixo dessa temperatura ele é não nulo (ANNETT, 2003).

Utilizando essas ideias, Landau juntamente com o também físico russo, Vitaly Lazarevich Ginzburg, em 1950, elaboraram um modelo originalmente introduzido como fenomenológico, porém Gor'kov mostrou em 1959 que este pode ser derivado da teoria microscópica BCS (a qual será estudada no próximo capítulo) (GOR'KOV, 1959).

A teoria Ginzburg e Landau usa princípios termodinâmicos para explicar a transição de fase do estado normal para o estado supercondutor, contudo em vez de usar as variáveis  $P$ (pressão) e  $V$ (volume) como parâmetros relevantes utiliza-se as variáveis  $\vec{H}$  (campo intensidade magnética) e a  $\vec{M}$  (magnetização). (OSTERMANN, FERREIRA e CAVALCANTI, 1998).

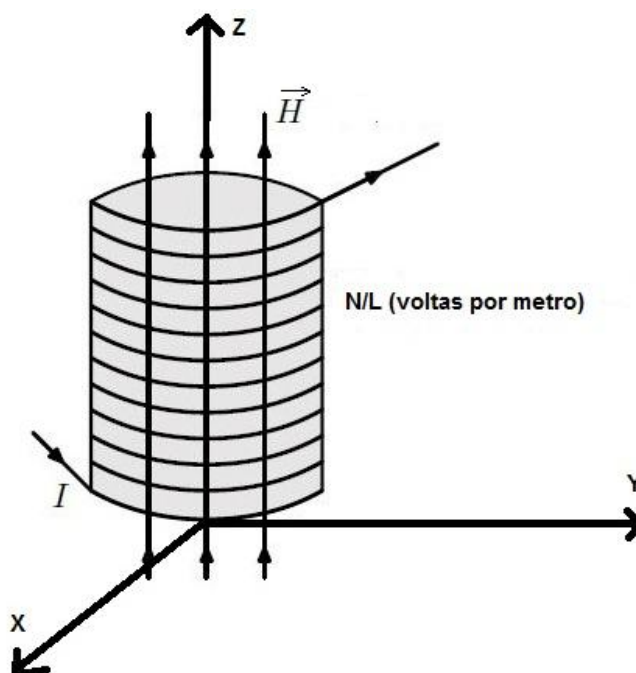


Figura 7: Amostra supercondutora no interior de um solenoide.  
(baseado ANNETT, 2003)

Considere uma amostra supercondutora cilíndrica de área transversal  $A$  ( $A = \pi R^2$ ), de comprimento  $L$  (com  $L \gg R$ ), ou seja muito longa, e com seu eixo na direção  $\hat{z}$ . Este supercondutor está envolvido em um solenoide de raio  $R$ ,  $N$  espiras uniformemente distribuídas e comprimento  $L$  (o comprimento do fio, de área transversal  $A_f$ , que forma o solenoide é  $L'$ ). Por este solenoide passa uma corrente  $I$ , conforme está ilustrado na Figura 7. Esta corrente gera um campo magnético associado, dado por (MACHADO, 2002):

$$H = \frac{NI}{L}. \quad 3.1$$

Vetorialmente:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{N}{L} I \hat{k}}. \quad 3.2$$

Onde  $N/L$  é o número de voltas por metro,  $I$  é a corrente que passa pelo solenoide e  $\hat{k}$  é versor na direção do eixo do cilindro.

A força de Lorentz é da pela equação:

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad 3.3$$

sendo que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são respectivamente o campo elétrico e o campo magnético aplicado sobre essa carga  $Q$  e  $\vec{v}$  é a velocidade dessa carga.

Se  $d\vec{l}'$  é o deslocamento infinitesimal no solenoide, sofrido por  $Q$  em um intervalo de tempo  $dt$ , onde:

$$d\vec{l}' = \vec{v}dt, \quad 3.4$$

então o trabalho realizado pela força de Lorentz será dado por (NUSSENZVEIG, 1997):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}', \quad 3.5$$

(3.4) em (3.5):

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v}dt. \quad 3.6$$

De (3.3):

$$dW = Q\vec{v} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})dt, \quad 3.7$$

$$dW = Q\vec{v} \cdot \vec{E}dt. \quad 3.8$$

Porém:

$$Q = -V_f n e, \quad 3.9$$

$$V_f = L' A_f, \quad 3.10$$

e,  $V_f$ ,  $n$ , são respectivamente, a carga elementar, o volume do fio e a quantidade de elétrons por unidade de volume. Sabendo que a direção da velocidade e a direção do campo elétrico é a mesma, mas com sentidos contrários, ou seja:

$$\vec{v} \cdot \vec{E} = -vE. \quad 3.11$$

Logo substituindo (3.9) e (3.11) em (3.8):

$$dW = V_f n e v E dt. \quad 3.12$$

Usando o fato que  $J = -nev$ :

$$dW = -V_f J E dt, \quad 3.13$$

se,

$$J = \frac{I}{A_f}, \quad 3.14$$

dessa maneira:

$$dW = -V_f \frac{I}{A_f} E dt. \quad 3.15$$

Usando (3.10):

$$dW = -IL' E dt, \quad 3.16$$

a f.e.m. (força eletromotriz) é dada pela eq.:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{l} = -N \frac{d\Phi}{dt}, \quad 3.17$$

$$E \int_0^{L'} dl = -N \frac{d\Phi}{dt}, \quad 3.18$$

$$\boxed{EL' = -N \frac{d\Phi}{dt}}. \quad 3.19$$

(3.19) em (3.16):

$$dW = N I d\Phi, \quad 3.20$$

De (3.1):

$$dW = L H d\Phi. \quad 3.21$$

Porém o fluxo magnético é dado pela eq.:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad 3.22$$

$$\Phi = \vec{B} \cdot \hat{k} A, \quad 3.23$$

$$d\Phi = A \hat{k} \cdot d\vec{B}, \quad 3.24$$

(3.24) em (3.21):

$$dW = L A \hat{k} H \cdot d\vec{B}, \quad 3.25$$

$$dW = V \vec{H} \cdot d\vec{B}. \quad 3.26$$

Da identidade do eletromagnetismo é sabido que:

$$d\vec{B} = \mu_0(d\vec{M} + d\vec{H}). \quad 3.27$$

Logo:

$$\boxed{dW = \mu_0 V \vec{H} \cdot (d\vec{M} + d\vec{H})}. \quad 3.28$$

O primeiro termo é o trabalho magnético feito na amostra supercondutora, já o segundo termo é o trabalho da autoindutância da bobina, ou seja, é o trabalho feito mesmo se não houvesse uma amostra no interior do solenoide. Isso implica em dizer que é a energia necessária para se ter o campo magnético sem a amostra. Interessando para estudo apenas o primeiro termo:

$$\boxed{dW = \mu_0 V \vec{H} \cdot d\vec{M}}. \quad 3.29$$

Segundo a primeira lei da termodinâmica:

$$dU = TdS + dW, \quad 3.30$$

de (3.29):

$$dU = TdS + \mu_0 V \vec{H} \cdot d\vec{M}. \quad 3.31$$

A entropia e a magnetização são variáveis que não podem ser medidas diretamente em laboratório, o que inviabiliza a utilidade prática dessa equação. Porém é possível fazer uma transformada de Legendre para obter a energia livre de Gibbs:

$$G(T, \vec{H}) = U - TS - \mu_0 V \vec{H} \cdot \vec{M}, \quad 3.32$$

$$dG(T, \vec{H}) = dU - (dT)S - TdS - \mu_0 V d\vec{H} \cdot \vec{M} - \mu_0 V \vec{H} \cdot d\vec{M}, \quad 3.33$$

$$\boxed{dG(T, \vec{H}) = -SdT - \mu_0 V \vec{M} \cdot d\vec{H}}. \quad 3.34$$

Já a energia livre de Helmholtz é dada por:

$$\mathcal{F}(T, \vec{M}) = U - TS, \quad 3.35$$

$$d\mathcal{F}(T, \vec{M}) = dU - dTS - TdS, \quad 3.36$$

$$\boxed{d\mathcal{F}(T, \vec{M}) = -TdS + \mu_0 V \vec{H} \cdot d\vec{M}}. \quad 3.37$$

A eq. (3.37) pode ser útil para alguns casos, porém será usado o potencial termodinâmico de Gibbs, já que é possível medir a variação da temperatura e a variação do campo e calcular a entropia e a magnetização da seguinte maneira:

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T}, \quad 3.38$$

$$\vec{M} = -\frac{\partial G}{\partial \vec{H}}, \quad 3.39$$

Analisando uma amostra supercondutora para uma temperatura fixa qualquer  $T$ , então  $dT = 0$ . A eq. (3.34) fica:



$$dG_S(T, \vec{H}) = -\mu_0 V \vec{M} \cdot d\vec{H}, \quad 3.40$$

$$dg_S(T, \vec{H}) = \frac{dG_S(T, \vec{H})}{V}. \quad 3.41$$

$g_S$  é a densidade de energia livre de Gibbs do estado supercondutor.

Levando em conta o efeito Meissner para o supercondutor do tipo I ( $\vec{B} = 0$ ).

(3.27) implica em:

$$\vec{M} = -\vec{H}, \quad 3.42$$

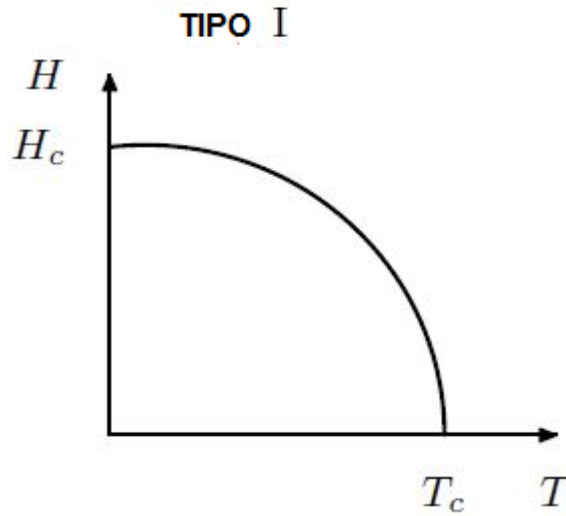


Figura 8: Diagrama de fase para o supercondutor do Tipo I (baseado ANNETT, 2003)

Alterando os valores de (3.42) e (3.41) em (3.40) encontra-se:

$$dg_S(T, \vec{H}) = \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{H}, \quad 3.43$$

$$\int_{\vec{H}_a}^{\vec{H}_c} dg_S(T, \vec{H}) = \int_{\vec{H}_a}^{\vec{H}_c} \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{H}, \quad 3.44$$

$$g_S(T, \vec{H}_c) - g_S(T, \vec{H}_a) = \mu_0 \frac{\vec{H}_c^2}{2} - \mu_0 \frac{\vec{H}_a^2}{2}. \quad 3.45$$

Para materiais paramagnéticos e diamagnéticos típicos, a suscetibilidade magnética é próxima de zero. No estado normal, os supercondutores do tipo I de baixas temperaturas, comumente são paramagnéticos. A sua suscetibilidade magnética é desprezível ao comparar com o estado supercondutor (diamagnético perfeito) e pode-se aproximar a magnetização do estado normal para:

$$\vec{M} \approx 0, \quad 3.46$$

$$dg_n(T, \vec{H}) = \frac{dG_n(T, \vec{H})}{V}. \quad 3.47$$

$g_n$  é a densidade de energia livre de Gibbs do estado normal.

Então fazendo a análise uma amostra no estado normal para uma temperatura fixa qualquer  $T$ ,  $dT = 0$  e, levando em consideração as eqs. (3.46) e (3.47), (3.34) fica:

$$dg_n(T, \vec{H}) = 0, \quad 3.48$$

$$\int_{\vec{H}_a}^{\vec{H}_c} dg_n(T, \vec{H}) = 0, \quad 3.49$$

$$g_n(T, \vec{H}_c) - g_n(T, \vec{H}_a) = 0. \quad 3.50$$

Na transição de fase ( $\vec{H} = \vec{H}_c$ ), tem que haver equilíbrio termodinâmico, isto quer dizer que:

$$g_s(T, \vec{H}_c) = g_n(T, \vec{H}_c), \quad 3.51$$

(3.51) em (3.50):

$$g_s(T, \vec{H}_c) = g_n(T, \vec{H}_a), \quad 3.52$$

substituindo (3.52) em (3.45):

$$g_n(T, \vec{H}_a) - g_s(T, \vec{H}_a) = \mu_0 \frac{\vec{H}_c^2}{2} - \mu_0 \frac{\vec{H}_a^2}{2}. \quad 3.53$$

Observando a eq. (3.53), chega-se a conclusão que a diferença de densidade de energia livre do estado normal para o estado supercondutor, para uma temperatura fixa e um campo magnético aplicando ( $\vec{H}_a < \vec{H}_c$ ), é sempre não negativa. Pelo princípio do mínimo de energia o estado supercondutor é estável, já que para qualquer temperatura fixa abaixo de  $T_c$ ,  $g_n(T, \vec{H}_a) > g_s(T, \vec{H}_a)$ . Se o campo aplicado for nulo ( $\vec{H}_a = \vec{0}$ ), então pela equação (3.54):

$$g_n(T, 0) - g_s(T, 0) = \mu_0 \frac{\vec{H}_c^2}{2}, \quad 3.54$$

esta diferença de energia é denominada de energia de condensação.

Como o campo aplicando não depende da temperatura, se usar a eq. (3.38) obtém-se da eq. (3.53) que:

$$s_n(T, \vec{H}_a) - s_s(T, \vec{H}_a) = -\mu_0 \vec{H}_c \frac{\partial \vec{H}_c}{\partial T}. \quad 3.55$$

Foi verificado experimentalmente que o campo crítico é função apenas da temperatura ( $\vec{H}_c = \vec{H}_c(T)$ ) (TINKAN, 1996):

$$\vec{H}_c(T) \approx \vec{H}_c(0) \left[ 1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right], \quad 3.56$$

$$\frac{\partial \vec{H}_c}{\partial T} = \frac{d\vec{H}_c}{dT}. \quad 3.57$$

$$\boxed{s_n(T, \vec{H}_a) - s_s(T, \vec{H}_a) = -\mu_0 \vec{H}_c \frac{d\vec{H}_c}{dT}}, \quad 3.58$$

a entropia não depende do campo aplicado, da equação (3.58) se fizer (ROSE-INNES, 1988):

$$\begin{cases} T = T_c \\ \vec{H}_c = \vec{0}. \\ \vec{H}_a = \vec{0} \end{cases} \quad 3.59$$

De (3.58) conclui-se:

$$s_n(T_c, 0) = s_s(T_c, 0), \quad 3.60$$

ou seja não há variação de densidade de entropia no sistema ( $ds = 0$ ) e por conseguinte não há calor latente, de fato:

$$dQ = VTds = 0. \quad 3.61$$

Para essas condições então a transição de fase é de segunda ordem e ocorre assim que a temperatura atinge a temperatura crítica. Já, quando o campo magnético crítico é diferente de zero, esta transição é de primeira ordem (3.58).

### 3.1 Sistema Homogêneo

Assim como na Teoria de London para uma amostra supercondutora que possui  $n$  elétrons condutores por unidade de volume, tem desse total,  $n_s(T)$  superelétrons por unidade de volume e  $n_n$  elétrons normais por unidade de volume. E as equações (2.2) e (2.3) permanecem válidas.

O modelo de Ginzburg-Landau baseia-se em um parâmetro de ordem macroscópico complexo  $\psi$ , que pode ser encarado como uma função de onda macroscópica do estado supercondutor. (OSTERMANN, FERREIRA e CAVALCANTI, 1998)

Análogo para a magnetização, acima da temperatura crítica ( $T_c$ ), ou seja na fase normal, o estado está desordenado, então o parâmetro é nulo e abaixo dessa temperatura, a fase é supercondutora e  $\psi$  é diferente de zero. Pode-se resumir escrevendo:

$$\begin{cases} \psi \neq 0 & T < T_c & \text{supercondutor} \\ \psi = 0 & T \geq T_c & \text{normal} \end{cases} \quad \mathbf{3.62}$$

Ginzburg e Landau postularam que a energia livre para o estado supercondutor dependia do parâmetro  $\psi$ , podendo assim ser expandida em uma série de potência. Para o caso sem a presença de um campo magnético externo, ou seja, para um sistema homogêneo a expansão da energia livre de Gibbs por unidade de volume seria:

$$g_s = A + B(T)\psi + C(T)\psi\psi^* + D(T)\psi\psi^*\psi + E(T)\psi\psi^*\psi\psi^* \dots \quad \mathbf{3.63}$$

Esta teoria estuda o comportamento dos materiais próximo da temperatura crítica, mas quanto mais próximo à temperatura está de  $T_c$ , menor será o  $\psi$ , sendo assim os termos de ordem superior podem ser desprezados. Por outro lado à energia é real então os coeficientes que multiplicam os termos complexos devem ser nulos, a eq. (3.63) irá ficar:

$$g_s = A + C(T)\psi\psi^* + E(T)\psi\psi^*\psi\psi^*. \quad \mathbf{3.64}$$

Quando  $T = T_c$ ,

$$\begin{cases} \psi = 0 \\ g_s = g_n \end{cases} \quad \mathbf{3.65}$$

Isto implica dizer que:

$$A = g_n, \quad \mathbf{3.66}$$

e sendo assim a eq. (3.64) fica:

$$g_s - g_n = C(T)|\psi|^2 + E(T)|\psi|^4. \quad \mathbf{3.67}$$

Para haver um mínimo de energia  $E(T) > 0$ , para qualquer valor de  $T$ . Fazendo então uma aproximação de primeira ordem:

$$E(T) = \frac{b}{2} = \frac{b}{2} = \text{cte} > 0. \quad \mathbf{3.68}$$

Onde (b) é uma constante e o denominador é apenas conveniência matemática, melhor compreendida posteriormente.

$$g_s - g_n = C(T)|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4. \quad \mathbf{3.69}$$

Para que a energia tenha mínimo:

$$\frac{\partial g_s}{\partial |\psi|^2} = C(T) + b|\psi|^2 = 0, \quad \mathbf{3.70}$$

$$\boxed{|\psi|^2 = -\frac{C(T)}{b}} \quad \mathbf{3.71}$$

O gráfico de cada termo da (3.69), é ilustrado na figura 9:

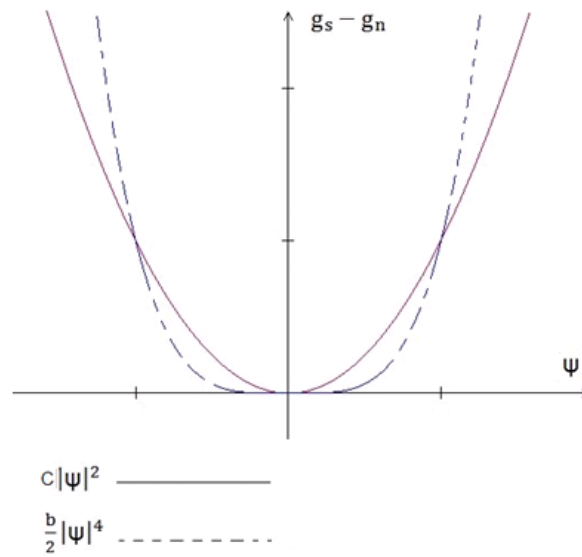


Figura 9: Gráfico para análise da diferença de densidade livre de energia em função do parâmetro de ordem.

Se  $T = T_c$ , o conjunto de equações (3.65) são satisfeitas. Como  $|\psi|^2$  é sempre não negativo, se  $C(T)$  for positivo, então o único mínimo de energia será o trivial, ilustrado na Figura 10. Este caso não é de interesse para este trabalho, já que pra  $\psi = 0$  não há supercondutividade. Logo, o caso de interesse é para  $C(T)$  negativo, ilustrado na Figura 11. Pode-se escrever  $C(T)$  como sendo:

$$C(T) = \begin{cases} a(T - T_c), & T < T_c \\ 0, & T \geq T_c \end{cases} \quad 3.72$$

Na qual  $(a)$  é uma constante positiva. Usando (3.71) e (3.72) em (3.69) obtém-se a densidade de energia livre de Gibbs para o mínimo:

$$g_s - g_n = -\frac{a^2(T - T_c)^2}{2b}. \quad 3.73$$

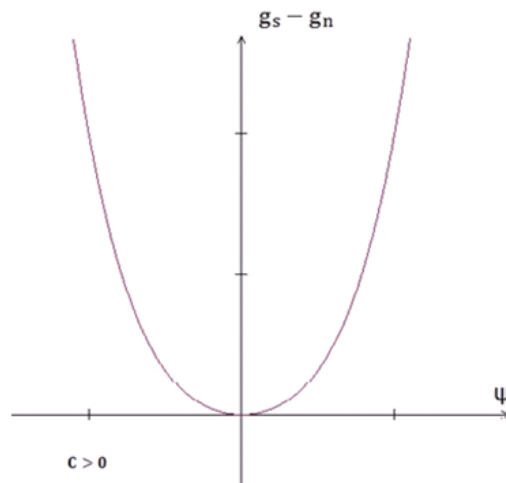


Figura 10: Diferença de densidade livre de energia em função do parâmetro de ordem, para  $C$  positivo.

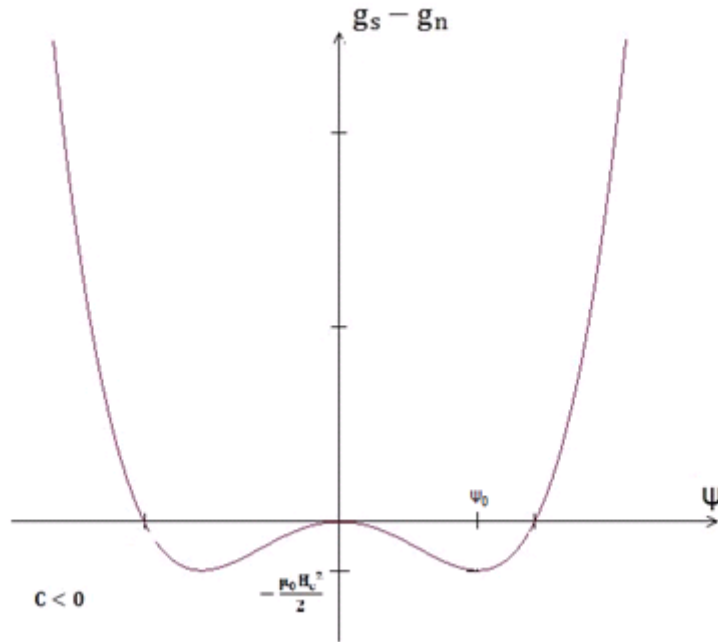


Figura 11: “Chapéu Mexicano”. Diferença de densidade livre de energia em função do parâmetro de ordem, para  $C$  negativo.

Usando as eqs. (3.73) e (3.38) se obtém:

$$s_s - s_n = \frac{a^2(T - T_c)}{b}. \quad 3.74$$

O que condiz com os resultados já obtidos anteriormente em (3.55) e (3.60). De fato, se fizer,  $T = T_c$ , na eq. 3.74, obtém-se:

$$s_s = s_n, \quad 3.75$$

não há variação de densidade de entropia, logo não há calor latente. Agora se  $T < T_c$ ,

$$s_n - s_s > 0. \quad 3.76$$

## 3.2 Sistema Não Homogêneo

Para a presença de um campo magnético externo  $\vec{H}_0$ , Ginzburg e Landau postularam que a densidade de energia livre em um sistema não homogêneo seria dada pela eq.(3.69) acrescida de alguns termos, mostrando a seguir:

$$g_{sH} = g_n + C|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{b}{2}|\psi(\vec{r})|^4 + \frac{|-i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) - (2e)\vec{A}\psi(\vec{r})|^2}{2(2m)} + \frac{\mu_0(\vec{H})^2}{2} + \mu_0\vec{H} \cdot \vec{M} \quad 3.77$$

em que o sexto termo da eq. (3.77),

$$\mu_0 \frac{(\vec{H})^2}{2}, \quad 3.78$$

diz respeito à densidade de energia gerada por  $\vec{H}$ , que por sua vez é o campo magnético proveniente da corrente dos elétrons normais, logo (visto no capítulo 2):

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{A}}{\mu_0}. \quad 3.79$$

Já o quinto termo da eq. (3.77),

$$\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M}, \quad 3.80$$

é energia da interação entre o campo residual  $\vec{H}$ , e a magnetização  $\vec{M}$ , que pelo efeito Meissner é dado por:

$$\vec{M} = -\vec{H}_0, \quad 3.81$$

(3.81) em (3.77):

$$g_{sH} = g_n + C|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{b}{2}|\psi(\vec{r})|^4 + \frac{|-i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) - (2e)\vec{A}\psi(\vec{r})|^2}{2(2m)} + \frac{\mu_0(\vec{H})^2}{2} - \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}_0. \quad 3.82$$

O termo,

$$\frac{|-i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) - (2e)\vec{A}\psi(\vec{r})|^2}{2(2m)}, \quad 3.83$$

representa a energia cinética do par de elétrons que constituem a supercorrente. Já o,

$$\mu_0 \frac{(\vec{H})^2}{2} - \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}_0, \quad 3.84$$

é a densidade de energia magnética.

Integrando a eq.(3.82) no volume do supercondutor obtém-se:

$$G_{sH} = G_n + \int_V \left\{ C|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{b}{2}|\psi(\vec{r})|^4 + \frac{|-i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) - (2e)\vec{A}\psi(\vec{r})|^2}{2(2m)} + \mu_0 \frac{(\vec{H})^2}{2} - \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}_0 \right\} d^3\vec{r}, \quad 3.85$$

$G_{sH}$  é um funcional de  $\psi(\vec{r})$ ,  $\psi^*(\vec{r})$  e  $\vec{A}(\vec{r})$ , que são linearmente independentes entre si. Para encontrar a energia mínima é preciso fazer um cálculo variacional para obter os valores das funções  $\psi(\vec{r})$ ,  $\psi^*(\vec{r})$  e  $\vec{A}(\vec{r})$  que a minimizem. Lembrando que:

$$|\psi|^2 = \psi\psi^*, \quad 3.86$$

e fazendo o variacional da energia então:

$$\begin{aligned}\delta G_{\text{SH}} &= G_{\text{SH}}(\psi(\vec{r}) + \delta\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r}) + \delta\psi^*(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r}) + \delta\vec{A}(\vec{r})) \\ &\quad - G_{\text{SH}}(\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r})) = \frac{G_{\text{SH}}}{\delta\psi} \delta\psi + \frac{G_{\text{SH}}}{\delta\psi^*} \delta\psi^* + \frac{G_{\text{SH}}}{\delta\vec{A}} \delta\vec{A}.\end{aligned}\quad 3.87$$

Se  $\delta G_{\text{SH}} = 0$ , para um ponto extremo  $(\psi_0(\vec{r}), \psi_0^*(\vec{r}), \vec{A}_0(\vec{r}))$ , então para esse mesmo ponto as variações parciais também serão nulas:

$$\frac{\delta G_{\text{SH}}}{\delta\psi} = \frac{\delta G_{\text{SH}}}{\delta\psi^*} = \frac{\delta G_{\text{SH}}}{\delta\vec{A}} = 0. \quad 3.88$$

Pela eq.(3.85) pode ser encontrado:

$$\begin{aligned}\frac{\delta G_{\text{SH}}}{\delta\psi^*} &= \frac{\delta G_{\text{n}}}{\delta\psi^*} + \int_V \frac{\delta}{\delta\psi^*} \left\{ C|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{b}{2} |\psi(\vec{r})|^4 + \frac{|-i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) - (2e)\vec{A}\psi(\vec{r})|^2}{2(2m)} + \mu_0 \frac{(\vec{H})^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}_0 \right\} d^3\vec{r} = 0.\end{aligned}\quad 3.89$$

Lembrando que para um número complexo qualquer:

$$|c|^2 = c \cdot c^*. \quad 3.90$$

Por sua vez:

$$|-i\hbar\vec{\nabla}\psi - 2e\vec{A}\psi|^2 = (-i\hbar\vec{\nabla}\psi - 2e\vec{A}\psi) \cdot (i\hbar\vec{\nabla}\psi^* - 2e\vec{A}\psi^*) \quad 3.91$$

Trocando (3.79), (3.86) e (3.91) em (3.89) tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\delta G_{\text{SH}}}{\delta\psi^*} &= \frac{\delta G_{\text{n}}}{\delta\psi^*} + \int_V \frac{\delta}{\delta\psi^*} \left\{ C\psi\psi^* + \frac{b}{2} \psi^2\psi^{*2} + \frac{(-i\hbar\vec{\nabla}\psi - 2e\vec{A}\psi) \cdot (i\hbar\vec{\nabla}\psi^* - 2e\vec{A}\psi^*)}{2(2m)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2}{2\mu_0} - \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{H}_0 \right\} d^3\vec{r} = 0\end{aligned}\quad 3.92$$

Como é sabido que  $\psi(\vec{r})$ ,  $\psi^*(\vec{r})$  e  $\vec{A}(\vec{r})$  são linearmente independentes então:

$$\frac{\delta\vec{A}}{\delta\psi^*} = 0, \quad 3.93$$

substituindo (3.88) e (3.93) em (3.92) encontra-se:

$$\frac{\delta G_{\text{SH}}}{\delta\psi^*} = \int_V \left\{ C\psi\delta\psi^* + b\psi^2\psi^*\delta\psi^* + \frac{(-i\hbar\vec{\nabla}\psi - 2e\vec{A}\psi) \cdot (i\hbar\vec{\nabla}(\delta\psi^*) - 2e\vec{A}\delta\psi^*)}{2(2m)} \right\} d^3\vec{r} = 0 \quad 3.94$$

Agora chamando:

$$\vec{W} = (-i\hbar\vec{\nabla}\psi - 2e\vec{A}\psi), \quad 3.95$$



$$\frac{\delta G_{sH}}{\delta \psi^*} = \int_V \left\{ C\psi \delta\psi^* + b\psi^2 \psi^* \delta\psi^* + \frac{(i\hbar \vec{W} \cdot \vec{\nabla} \delta\psi^* - 2e\vec{W} \cdot (\vec{A} \delta\psi^*))}{2(2m)} \right\} d^3\vec{r} = 0. \quad 3.96$$

Lembrando-se da identidade matemática:

$$\vec{\nabla} \cdot (\delta\psi^* \cdot \vec{W}) = \vec{W} \cdot \vec{\nabla}(\delta\psi^*) + \delta\psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{W}, \quad 3.97$$

$$\vec{W} \cdot \vec{\nabla}(\delta\psi^*) = \vec{\nabla} \cdot (\delta\psi^* \cdot \vec{W}) - \delta\psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{W}, \quad 3.98$$

e alterando (3.98) em (3.96):

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{sH}}{\delta \psi^*} = \int_V \left\{ C\psi \delta\psi^* + b\psi^2 \psi^* \delta\psi^* + \frac{(-i\hbar \delta\psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{W} - 2e\vec{A} \delta\psi^* \cdot \vec{W})}{2(2m)} \right\} d^3\vec{r} \\ + \int_V \left\{ \frac{i\hbar \vec{\nabla} \cdot (\delta\psi^* \cdot \vec{W})}{2(2m)} \right\} d^3\vec{r} = 0. \end{aligned} \quad 3.99$$

O teorema da divergência, também conhecido como teorema de Gauss é dado por:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d^3\vec{r} = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA, \quad 3.10$$

0

no qual  $\vec{F}$  é um campo vetorial e  $S$  é uma superfície fechada que delimita o volume  $V$ , e está orientada por  $\hat{n}$ , normal exterior. Se usar (3.95) e (3.100) em (3.99) se obtém:

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{sH}}{\delta \psi^*} = \int_V \left\{ C\psi \delta\psi^* + b\psi^2 \psi^* \delta\psi^* \right. \\ \left. + \frac{-i\hbar \delta\psi^* \vec{\nabla} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} \psi - 2e\vec{A} \psi) - 2e\vec{A} \delta\psi^* \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} \psi - 2e\vec{A} \psi)}{2(2m)} \right\} d^3\vec{r} \\ + \oint_S \left\{ \frac{i\hbar (\delta\psi^* \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} \psi - 2e\vec{A} \psi))}{2(2m)} \right\} \hat{n} dA = 0, \end{aligned} \quad 3.101$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{sH}}{\delta \psi^*} = \int_V \left\{ C\psi + b\psi|\psi|^2 + \frac{(i\hbar)^2 \vec{\nabla}^2 \psi + 2(2e)i\hbar \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi + (2e)^2 (\vec{A})^2 \psi}{2(2m)} \right\} \delta\psi^* d^3\vec{r} \\ + \frac{i\hbar}{2(2m)} \oint_S \{-i\hbar \vec{\nabla} \psi - 2e\vec{A} \psi\} \hat{n} \delta\psi^* dA = 0, \end{aligned} \quad 3.102$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{sH}}{\delta \psi^*} = \int_V \left\{ C\psi + b\psi|\psi|^2 + \frac{(-i\hbar \vec{\nabla} - 2e\vec{A})^2 \psi}{2(2m)} \right\} \delta\psi^* d^3\vec{r} \\ + \frac{i\hbar}{2(2m)} \oint_S (-i\hbar \vec{\nabla} - 2e\vec{A}) \psi \hat{n} \delta\psi^* dA = 0. \end{aligned} \quad 3.103$$

Para a eq. (3.103) ser verdade cada uma das integrais que a compõe tem que ser nula. Logo:

$$\boxed{C\psi + b\psi|\psi|^2 + \frac{(-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A})^2\psi}{2(2m)} = 0}, \quad 3.104$$

$$\boxed{(-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A})\psi\hat{n} = 0}. \quad 3.105$$

As quais são as equações para o parâmetro de ordem  $\psi$ . Porém para encontrar as equações de  $\psi^*$ , basta fazer o processo análogo para  $\frac{\delta G_{SH}}{\delta \psi} = 0$ ,

$$\boxed{C\psi^* + b\psi^*|\psi|^2 + \frac{(-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A})^2\psi^*}{2(2m)} = 0}, \quad 3.106$$

$$\boxed{(-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A})\psi^*\hat{n} = 0}. \quad 3.107$$

As equações (3.105) e (3.107) explicitam que não há fugas de corrente através da interface de um supercondutor isolado.

Por último, fazendo a variação para o potencial vetor  $\vec{A}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{SH}}{\delta \vec{A}} = \frac{\delta G_n}{\delta \vec{A}} + \int_V \frac{\delta}{\delta \vec{A}} \left\{ C\psi\psi^* + \frac{b}{2}\psi^2\psi^{*2} + \frac{(-i\hbar\vec{\nabla}\psi - 2e\vec{A}\psi) \cdot (i\hbar\vec{\nabla}\psi^* - 2e\vec{A}\psi^*)}{2(2m)} \right. \\ \left. + \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2}{2\mu_0} - \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{H}_0 \right\} d^3\vec{r} = 0. \end{aligned} \quad 3.108$$

Contudo:

$$\frac{\delta G_n}{\delta \vec{A}} = \frac{\delta \psi^*}{\delta \vec{A}} = \frac{\delta \psi}{\delta \vec{A}} = 0, \quad 3.109$$

assim:

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{SH}}{\delta \vec{A}} = \int_V \left\{ \frac{(-2e\delta\vec{A}\psi) \cdot (i\hbar\vec{\nabla}\psi^* - 2e\vec{A}\psi^*) + (-i\hbar\vec{\nabla}\psi - 2e\vec{A}\psi) \cdot (-2e\delta\vec{A}\psi^*)}{2(2m)} \right. \\ \left. + \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \delta\vec{A})}{\mu_0} - \vec{\nabla} \times \delta\vec{A} \cdot \vec{H}_0 \right\} d^3\vec{r} = 0, \end{aligned} \quad 3.110$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{SH}}{\delta \vec{A}} = \int_V \left\{ \frac{(-2e\delta\vec{A}\psi) \cdot (i\hbar\vec{\nabla}\psi^* - 2e\vec{A}\psi^*) + (-i\hbar\vec{\nabla}\psi - 2e\vec{A}\psi) \cdot (-2e\delta\vec{A}\psi^*)}{2(2m)} \right. \\ \left. + \frac{((\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \mu_0\vec{H}_0) \cdot (\vec{\nabla} \times \delta\vec{A})}{\mu_0} \right\} d^3\vec{r} = 0. \end{aligned} \quad 3.111$$

Chamando:

$$\vec{Y} = \frac{((\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \mu_0 \vec{H}_0)}{\mu_0}, \quad 3.112$$

$$\vec{Z} = \delta \vec{A}, \quad 3.113$$

a eq.(3.111) ficará:

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{SH}}{\delta \vec{A}} = \int_V \left\{ \frac{(-2e\delta \vec{A}\psi) \cdot (i\hbar \vec{\nabla} \psi^* - 2e\vec{A} \psi^*) + (-i\hbar \vec{\nabla} \psi - 2e\vec{A}\psi) \cdot (-2e\delta \vec{A} \psi^*)}{2(2m)} + \vec{Y} \right. \\ \left. \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Z}) \right\} d^3\vec{r} = 0. \end{aligned} \quad 3.114$$

Lembrando-se da identidade matemática:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{Y} \times \vec{Z}) = \vec{Z} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Y}) - \vec{Y} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Z}), \quad 3.115$$

$$\vec{Y} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Z}) = \vec{Z} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Y}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{Y} \times \vec{Z}). \quad 3.116$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{SH}}{\delta \vec{A}} = \int_V \delta \vec{A} \left\{ \frac{-i\hbar(2e)\psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* + 2(2e)^2 \vec{A} |\psi|^2 + i\hbar(2e) \psi^* \vec{\nabla} \psi}{2(2m)} + \vec{Z} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Y}) \right\} d^3\vec{r} \\ + \int_V \{ -\vec{\nabla} \cdot (\vec{Y} \times \vec{Z}) \} d^3\vec{r} = 0. \end{aligned} \quad 3.117$$

Utilizando mais uma vez o teorema do divergente (3.100),

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{SH}}{\delta \vec{A}} = \int_V \left[ \delta \vec{A} \left\{ \frac{-i\hbar(2e)\psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* + 2(2e)^2 \vec{A} |\psi|^2 + i\hbar(2e) \psi^* \vec{\nabla} \psi}{2(2m)} \right\} + \vec{Z} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Y}) \right] d^3\vec{r} \\ - \oint_S (\vec{Y} \times \vec{Z}) \cdot \hat{n} ds = 0, \end{aligned} \quad 3.118$$

de (3.112) e (3.113):

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{SH}}{\delta \vec{A}} = \int_V \delta \vec{A} \left\{ \frac{-i\hbar(2e)\psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* + 2(2e)^2 \vec{A} |\psi|^2 + i\hbar(2e) \psi^* \vec{\nabla} \psi}{2(2m)} \right. \\ \left. + \frac{\vec{\nabla} \times ((\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \mu_0 \vec{H}_0)}{\mu_0} \right\} d^3\vec{r} \\ - \oint_S \left( \frac{((\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \mu_0 \vec{H}_0) \times \delta \vec{A}}{\mu_0} \right) \cdot \hat{n} ds = 0. \end{aligned} \quad 3.119$$

Então:

$$\frac{-i\hbar(2e)\psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* + 2(2e)^2 \vec{A} |\psi|^2 + i\hbar(2e) \psi^* \vec{\nabla} \psi}{2(2m)} + \frac{\vec{\nabla} \times ((\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \mu_0 \vec{H}_0)}{\mu_0} = 0. \quad 3.120$$

Usando as equações (3.79), (3.120):

$$\frac{-i\hbar(2e)(\psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)}{2(2m)} + \frac{(2e)^2 \vec{A} |\psi|^2}{(2m)} + \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{\nabla} \times \vec{H}_0 = 0. \quad 3.121$$

Utilizando a lei de Ampère dada pela eq. (2.11) achamos que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_n, \quad 3.122$$

$\vec{J}_n$  é a densidade de corrente associada aos elétrons normais, já que  $\vec{H}$  é o campo magnético gerado pelas correntes de elétrons que não estão no estado supercondutor, como já foi mencionado anteriormente. Além disso:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_0 = \vec{J}_T, \quad 3.123$$

é a densidade de corrente total, gerada pelo campo externo  $\vec{H}_0$ .

Substituído (3.122) e (3.123) em (3.121):

$$\vec{J}_T - \vec{J}_n = \vec{J}_S = \frac{i\hbar(2e)(\psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)}{2(2m)} - \frac{(2e)^2 \vec{A} |\psi|^2}{(2m)}. \quad 3.124$$

Sendo  $\vec{J}_S$  é a densidade de corrente supercondutora. Esta também pode ser interpretada como a densidade de corrente quântica de uma partícula de massa e carga efetiva dada respectivamente por:

$$m^* = 2m, \quad 3.125$$

$$e^* = 2e. \quad 3.126$$

Como:

$$\psi = |\psi| e^{i\phi}, \quad 3.127$$

$\phi$  é a fase comum a todas as partículas. (3.124) ficará:

$$\vec{J}_S = \frac{i\hbar(2e)|\psi|^2(e^{i\phi} \vec{\nabla} e^{-i\phi} - e^{-i\phi} \vec{\nabla} e^{i\phi})}{2(2m)} - \frac{(2e)^2 \vec{A} |\psi|^2}{(2m)}, \quad 3.128$$

$$\vec{J}_S = \frac{i\hbar(2e)|\psi|^2(-2i\vec{\nabla}\phi)}{2(2m)} - \frac{(2e)^2 \vec{A} |\psi|^2}{(2m)}, \quad 3.129$$

$$\vec{J}_S = \frac{(2e)|\psi|^2(\hbar\vec{\nabla}\phi - 2e\vec{A})}{(2m)}. \quad 3.130$$

Pela teoria de London, ser puramente clássica, não haveria possibilidade de encontrar o termo que envolve  $\vec{\nabla}\phi$ . Este na teoria de London pode ser tratado apenas como uma escolha de calibre. Para um estado coerente:

$$\vec{\nabla}\phi = 0, \quad 3.131$$

$$\vec{J}_S = \frac{-2e^2 |\psi|^2 \vec{A}}{m}. \quad 3.132$$

Comparando (3.132) com (2.56):

$$\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} = \frac{2e^2 |\psi|^2}{m}, \quad 3.133$$

de (2.41):

$$\frac{\mu_0 e^2 n}{\mu_0 m} = \frac{e^2 2 |\psi|^2}{m}. \quad 3.134$$

Chegando a conclusão:

$$\boxed{|\psi|^2 = \frac{n}{2}}. \quad 3.135$$

Diante de tudo que foi exposto nesse capítulo, pautados nos conceitos da termodinâmica, concluiu-se que o estado supercondutor é estável, e que a transição de fase supercondutora via um funcional de energia depende de um parâmetro de ordem ( $\psi \propto$  a densidade de portadores de carga).

Com a descrição da transição supercondutora estabelecida, resta esclarecer como os portadores da supercorrente são formados. O conjunto das equações (3.125), (3.126) e (3.135) são os indícios que a supercondutividade é governada por elétrons associados em pares, denominados de pares de Cooper. De fato, como já foi mencionado anteriormente Gor'kov mostrou que a teoria GL pode ser obtida pela teoria BCS em um caso limite para temperaturas próximas a  $T_c$ , o que justifica a corrente de superelétrons ser formada por pares de elétrons.

No capítulo a seguir, está apresentada uma análise minuciosa e a descrição da formação dos portadores da supercorrente. Além disso, está apresentada também uma visão microscópica para os supercondutores de baixa temperatura crítica.

## 4. TEORIA BCS (1957), UMA VISÃO MICROSCÓPICA DA SUPERCONDUTIVIDADE

As teorias descritas até o momento neste trabalho, referem-se à supercondutividade em uma visão macroscópica pautada na observação dos fenômenos, e assumindo que os portadores de carga, chamados de superelétrons, fluem pelo supercondutor sem impedimento. Não há uma análise que explique a origem desses superelétrons e o porquê deles não sofrerem espalhamento pelas impurezas e imperfeições da rede. Neste contexto, a supercondutividade será estudada no âmbito microscópico. Diferentemente do modelo de Drude, que considera a aproximação de elétrons independentes, será levado em conta às interações entre os elétrons no interior de uma rede cristalina.

### 4.1 Interação Efetiva Elétron-Elétron e os Pares de Cooper.

O potencial colombiano para dois elétrons no vácuo é dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad 4.1$$

Fazendo a transformada de Fourier das interações Coulombianas obtém-se (TINKHAM, 1996):

$$V(\vec{q}) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 q^2}, \quad 4.2$$

em que:

$$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'. \quad 4.3$$

No entanto em 1950 Herbert (HERBERT, 1950) mostrou que em uma rede iônica estes elétrons podem se atrair, mesmo possuindo cargas iguais, e sendo assim tendo uma interação Coulombiana repulsiva, como se observa em (4.2). Pensando nisso, para dois elétrons de vetores de onda  $\vec{k}$  e  $\vec{k}'$  e energias  $\epsilon_k$  e  $\epsilon_{k'}$ , é preciso considerar a interação efetiva elétron-elétron cuja constante dielétrica total é dada por (ASHCROFT, 2011):

$$\frac{1}{\epsilon} = \left( \frac{q^2}{q^2 + k_0} \right) \cdot \left( 1 + \frac{\omega^2(q)}{\omega^2 - \omega^2(q)} \right), \quad 4.4$$

sendo que:

$$\omega = \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}}{\hbar}. \quad 4.5$$

e  $k_0$  é o vetor de onda de Thomas-Fermi.

Desse modo a eq. (4.2) será substituída por:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 q^2} \rightarrow \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 q^2 \epsilon} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 q^2} \left( \frac{q^2}{q^2 + k_0^2} \right) \cdot \left( 1 + \frac{\omega^2(q)}{\omega^2 - \omega^2(q)} \right), \quad 4.6$$

O potencial efetivo será então:

$$V_{kk'} = \left( \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (q^2 + k_0^2)} \right) \cdot \left( 1 + \frac{\omega^2(q)}{\omega^2 - \omega^2(q)} \right), \quad 4.7$$

o primeiro termo é o potencial Coulombiano blindado, e o segundo termo é dado pela interação elétron-fônon, tal que:

$$\left( 1 + \frac{\omega^2(q)}{\omega^2 - \omega^2(q)} \right) = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega^2(q)}. \quad 4.8$$

A frequência angular máxima para os fônons estarem no regime acústico é a frequência de Debye ( $\omega_D$ ). Portanto, que para os elétrons terem uma interação atrativa e formem um estado ligado (ou seja um potencial efetivo negativo) necessita que:

$$\omega < \omega_D, \quad 4.9$$

ou então de (4.5):

$$\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} < \hbar\omega_D. \quad 4.10$$

Conclui-se que, quando um elétron de vetor de onda  $\vec{k}$  passa por uma rede iônica a deforma, contraindo-a. Quando ela relaxa emite uma espécie de “onda”, que transporta energia e momento, pode-se assim associa-la a uma quase partícula denominada fônon (MACHADO, 2002). Se este fônon for absorvido por outro elétron de vetor de onda  $\vec{k}'$  de forma atrativa, de tal modo que supere a repulsão Coulombiana, ou seja para  $\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} < \hbar\omega_D$ , então este par de elétrons forma um estado ligado.

Em 1956 Cooper (COOPER, 1956) pautado nessas ideias demonstrou que em um supercondutor os elétrons se ligavam formando um par, conhecido como pares de Cooper, os quais podem ocupar o mesmo estado quântico, possibilitando assim serem considerados como bósons. A corrente por sua vez será fruto do fluxo desses pares, e se a energia térmica não destruí-los, então não haverá resistividade elétrica.

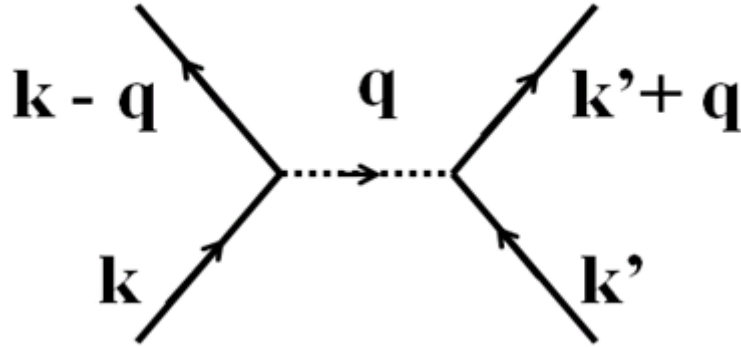


Figura 12: Interação entre elétrons através de fônons.  
(com base ROSE-INNES 1988)

## 4.2 Solução Canônica para a Teoria BCS

Em 1957 John Bardeen, Leon Cooper e Robert Schrieffer (BARDEEN, COOPER SCHRIEFFER, 1957) elaboraram uma teoria microscópica para explicar a supercondutividade de baixa temperatura. A Hamiltoniana da segunda quantização do sistema é dada por:

$$\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma} + \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{k}' \\ \sigma,\sigma'}} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\sigma,\sigma'} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}',\sigma'} \hat{C}_{\mathbf{k}',\sigma'} \quad 4.11$$

sendo o primeiro termo a energia cinética, o segundo termo a energia de ligação do par. E  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ , são os vetores de onda dos elétrons que formam o par e  $\sigma, \sigma'$  são os momentos de spin destes. Além disso:

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu. \quad 4.12$$

Adotando  $\mu = \epsilon_F$  (energia de Fermi), para os metais, pois para eles o potencial químico não varia muito com a temperatura.

Ao analisar o segundo termo da eq. (4.11) obtém-se:

$$\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{k}' \\ \sigma,\sigma'}} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\sigma,\sigma'} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}',\sigma'} \hat{C}_{\mathbf{k}',\sigma'} = \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{k}' \\ \sigma}} (V_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\sigma\uparrow} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}',\sigma} \hat{C}_{\mathbf{k}',\sigma} + V_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\sigma\downarrow} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}',\sigma} \hat{C}_{\mathbf{k}',\sigma}), \quad 4.13$$

$$\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{k}' \\ \sigma,\sigma'}} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\sigma,\sigma'} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}',\sigma'} \hat{C}_{\mathbf{k}',\sigma'}$$

$$= \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} (V_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\uparrow\uparrow} \hat{C}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}'\uparrow} \hat{C}_{\mathbf{k}'\uparrow} + V_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\uparrow\downarrow} \hat{C}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}'\downarrow} \hat{C}_{\mathbf{k}'\uparrow} \\ + V_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\downarrow\uparrow} \hat{C}_{\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}'\uparrow} \hat{C}_{\mathbf{k}'\downarrow} + V_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\downarrow\downarrow} \hat{C}_{\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}'\downarrow} \hat{C}_{\mathbf{k}'\downarrow}). \quad 4.14$$



Como os elétrons se tratam de férmions, então:

$$\{\hat{C}_{k,\sigma}, \hat{C}_{k',\sigma'}^+\} = \hat{C}_{k,\sigma} \hat{C}_{k',\sigma'}^+ + \hat{C}_{k',\sigma'}^+ \hat{C}_{k,\sigma} = \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad 4.15$$

$$\{\hat{C}_{k,\sigma}, \hat{C}_{k',\sigma'}\} = \{\hat{C}_{k,\sigma}^+, \hat{C}_{k',\sigma'}^+\} = 0, \quad 4.16$$

e além disso obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, implicando que o primeiro e o último termo da eq. (4.14) devem ser obrigatoriamente nulos. E devido à equação (4.16):

$$\sum_{\substack{k,k' \\ \sigma,\sigma'}} V_{k,k',\sigma,\sigma'} \hat{C}_{k,\sigma}^+ \hat{C}_{k,\sigma}^+ \hat{C}_{k',\sigma'} \hat{C}_{k',\sigma'} = \sum_{k,k'} V'_{k,k'} \hat{C}_{k\uparrow}^+ \hat{C}_{-k\downarrow}^+ \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow}. \quad 4.17$$

Sendo:

$$V'_{k,k'} = 2V_{k,k'\uparrow\downarrow}. \quad 4.18$$

Como visto anteriormente para que haja supercondutividade então o par tem que formar um estado ligado. Como  $V'_{k,k'}$  é pequeno, então fazendo uma aproximação de primeira ordem:

$$V'_{k,k'} = \begin{cases} -V & \text{se } |\varepsilon_k| \leq \hbar\omega_D \\ 0 & \text{se } |\varepsilon_k| > \hbar\omega_D \end{cases}. \quad 4.19$$

Como foi visto no capítulo 3, existe uma transição de fase onde há um mínimo de energia. Na aproximação de campo médio este mínimo de energia será o valor médio definido como:

$$B_k = \langle \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow} \rangle, \quad 4.20$$

e flutuação é:

$$\hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow} - \langle \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow} \rangle = \hat{F}_k, \quad 4.21$$

logo:

$$B_k + \hat{F}_k = \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow}, \quad 4.22$$

$$B_k^+ + \hat{F}_k^+ = \hat{C}_{k\uparrow}^+ \hat{C}_{-k\downarrow}^+. \quad 4.23$$

Alterando (4.22) e (4.23) em (4.17):

$$\sum_{k,k'} V_{k,k'} \hat{C}_{k\uparrow}^+ \hat{C}_{-k\downarrow}^+ \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow} = \sum_{k,k'} V'_{k,k'} (B_k^+ + \hat{F}_k^+) \cdot (B_{k'} + \hat{F}_{k'}), \quad 4.24$$

$$\sum_{k,k'} V_{k,k'} \hat{C}_{k\uparrow}^+ \hat{C}_{-k\downarrow}^+ \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow} = \sum_{k,k'} V_{k,k'} (B_k^+ B_{k'} + \hat{F}_k^+ B_{k'} + B_k^+ \hat{F}_{k'} + \hat{F}_k^+ \hat{F}_{k'}), \quad 4.25$$

Os desvios de ordem superior são desprezados, assim:

$$\begin{aligned} \sum_{k,k'} V_{k,k'} \hat{C}_{k\uparrow}^+ \hat{C}_{-k\downarrow}^+ \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow} \\ = \sum_{k,k'} V_{k,k'} (B_k^+ B_{k'} + (\hat{C}_{k\uparrow}^+ \hat{C}_{-k\downarrow}^+ - B_k^+) B_{k'} + B_k^+ (\hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow} - B_{k'})), \end{aligned} \quad 4.26$$

$$\sum_{k,k'} V_{k,k'} \hat{c}_{k\uparrow}^+ \hat{c}_{-k\downarrow}^+ \hat{c}_{-k'\downarrow} \hat{c}_{k'\uparrow} = \sum_{k,k'} (-B_{k'}^+ V_{k,k'} B_{k'} + \hat{c}_{k\uparrow}^+ \hat{c}_{-k\downarrow}^+ V_{k,k'} B_{k'} + V_{k,k'} B_{k'}^+ \hat{c}_{-k'\downarrow} \hat{c}_{k'\uparrow}). \quad 4.27$$

Definindo:

$$\Delta_k = - \sum_{k'} V_{k,k'} B_{k'}, \quad 4.28$$

a eq. (4.11) ficará:

$$\hat{H}' = \sum_k \varepsilon_k (\hat{c}_{k\uparrow}^+ \hat{c}_{k\uparrow} + \hat{c}_{-k\downarrow}^+ \hat{c}_{-k\downarrow}) - \sum_k -B_k^* \Delta_k + \hat{c}_{k\uparrow}^+ \hat{c}_{-k\downarrow}^+ \Delta_k + \Delta_k^* \hat{c}_{-k\downarrow} \hat{c}_{k\uparrow}. \quad 4.29$$

Pela eq. (4.29) é possível verificar que  $\Delta_k$  é responsável pela supercondutividade, assim como o parâmetro de ordem ( $\psi$ ) para a teoria de Ginzburg-Landau. Isto porque, se  $\Delta_k$  for igual a zero não há supercondutividade, a hamiltoniana só ficará com o termo cinético. Gor'kov mostrou que estes dois parâmetros diferem entre si por apenas constantes numéricas (GOR'KOV, 1959).

#### 4.2.1 Transformação de Bogoliubov e Valantin

De (4.15) é sabido que:

$$\{\hat{c}_{-k\downarrow}, \hat{c}_{-k\downarrow}^+\} = 1, \quad 4.30$$

$$\hat{c}_{-k\downarrow}^+ \hat{c}_{-k\downarrow} = 1 - \hat{c}_{-k\downarrow} \hat{c}_{-k\downarrow}^+. \quad 4.31$$

Substituindo (4.31) em (4.29):

$$\hat{H}' = \sum_k \varepsilon_k (\hat{c}_{k\uparrow}^+ \hat{c}_{k\uparrow} - \hat{c}_{-k\downarrow} \hat{c}_{-k\downarrow}^+) - \sum_k \hat{c}_{k\uparrow}^+ \hat{c}_{-k\downarrow}^+ \Delta_k + \Delta_k^* \hat{c}_{-k\downarrow} \hat{c}_{k\uparrow} + \sum_k \varepsilon_k + B_k^* \Delta_k. \quad 4.32$$

Escrevendo de forma matricial:

$$\hat{H}' = \sum_k \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow}^+ \\ \hat{c}_{-k\downarrow} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_k & 0 \\ 0 & -\varepsilon_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow} \\ \hat{c}_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix} + \sum_k \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow}^+ \\ \hat{c}_{-k\downarrow} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -\Delta_k \\ -\Delta_k^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow} \\ \hat{c}_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix} + \sum_k \varepsilon_k + B_k^* \Delta_k. \quad 4.33$$

$$\boxed{\hat{H}' = \sum_k \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow}^+ \\ \hat{c}_{-k\downarrow} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_k & -\Delta_k \\ -\Delta_k^* & -\varepsilon_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow} \\ \hat{c}_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix} + \sum_k \varepsilon_k + B_k^* \Delta_k}, \quad 4.34$$

o segundo termo apresentado nesta equação, é o estado fundamental da supercondutividade. Para encontrar os autovalores de energia, é preciso diagonalizar a matriz, para isso fazemos a transformação proposta por Valantin e Bogoliubov:

$$\begin{cases} \hat{C}_{k\uparrow} = u_k^* \hat{Y}_{k\uparrow} + v_k \hat{Y}_{-k\downarrow}^+ \\ \hat{C}_{-k\downarrow} = -v_k \hat{Y}_{k\uparrow}^+ + u_k^* \hat{Y}_{-k\downarrow} \end{cases}, \quad 4.35$$

na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{C}_{k\uparrow} \\ \hat{C}_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k^* & v_k \\ -v_k^* & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Y}_{k\uparrow} \\ \hat{Y}_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix}. \quad 4.36$$

Para que as equações (4.15) e (4.16) sejam satisfeitas e então o princípio de exclusão de Pauli seja obedecido então:

$$\begin{vmatrix} u_k^* & v_k \\ -v_k^* & u_k \end{vmatrix} = 1, \quad 4.37$$

$$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1. \quad 4.38$$

O princípio do mínimo de energia, sugere que os elétrons que constituem o par tenham momentos e spins opostos para constituir o estado fundamental do supercondutor. Sabendo que para um estado ( $\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$ ) a probabilidade de existir o par é dada por  $|v_k|^2$  e a probabilidade da ausência do par é dado por  $|u_k|^2$  então podemos escrever:

$$\Psi_{\text{BCS}} = \prod_{\mathbf{k}} (u_k + v_k \hat{C}_{k\uparrow}^+ \hat{C}_{-k\downarrow}^+) |\phi_0\rangle, \quad 4.39$$

para o qual  $|\phi_0\rangle$  é o estado de vácuo com nenhuma partícula.

Diagonalizando a matriz da equação (4.34) encontra-se:

$$\hat{H}'' = \sum_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} \hat{Y}_{k\uparrow}^+ \\ \hat{Y}_{-k\downarrow} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{Y}_{k\uparrow} \\ \hat{Y}_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix}. \quad 4.40$$

Sendo que:

$$E_k = (\Delta_k^2 + \varepsilon_k^2)^{\frac{1}{2}}. \quad 4.41$$

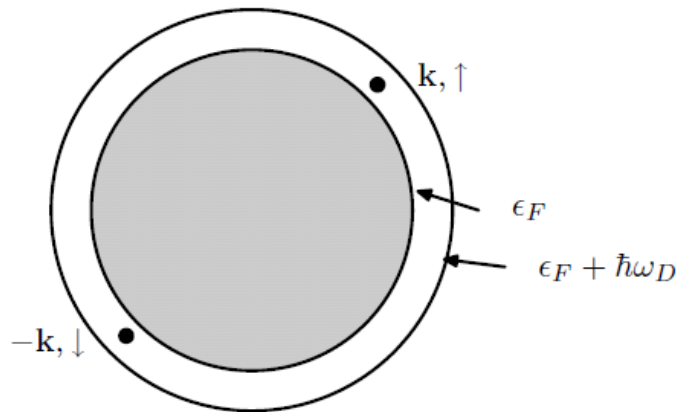


Figura 13: Formação dos pares de Cooper (ANNETT, 2003)

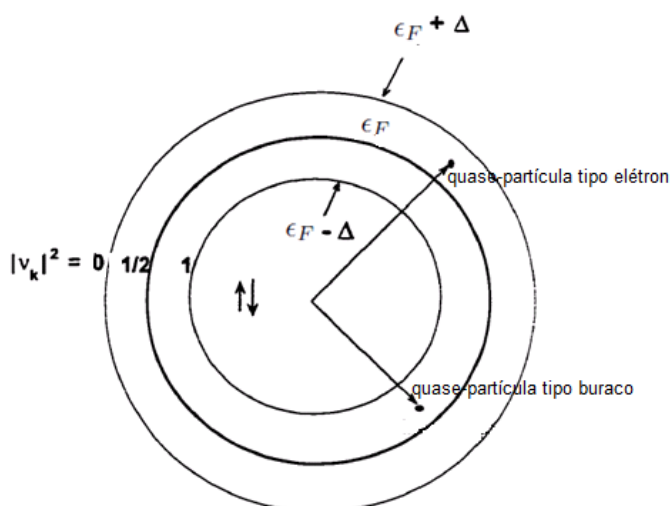


Figura 14: Formação de quase-partícula tipo elétron e quase-partícula tipo buraco. (Adaptado de TIDECKS, 1990)

Como se pode observar da eq. (4.40), que é o resultado da diagonalização da hamiltoniana, tem-se no espectro de energia,  $E_k$  e  $-E_k$ , desta forma além de ver a supercondutividade como a formação de pares de Cooper, pode-se também interpretar como o surgimento de quase-partícula tipo elétron e quase-partícula tipo buraco, quando a transição supercondutora é estabilizada.

Como exposto no decorrer deste capítulo, os elétrons em um metal podem interagir positivamente, atraindo-se. Essa atração denomina-se par de Cooper (figura 13). O surgimento dos portadores de cargas responsáveis pela supercondutividade. Além disso, foi verificada a formação de um “gap” em torno da energia de Fermi, que possibilita a corrente supercondutora fluir sem resistência elétrica.

Por meio do formalismo de Nambu, Yoichiro (prêmio Nobel de 2008), foi possível ter outra interpretação da supercondutividade, assumindo uma interação entre as quasipartículas (tipo buraco e tipo elétron), ao invés de considerar pares de elétrons com momentos de spin opostos (figura 14).

Uma vez entendido por completo a transição supercondutora para baixas temperaturas ( $\leq 40K$  que é o limite de validades das teorias estudadas), é possível iniciar estudos para aproximações do que ocorre nas cerâmicas supercondutoras (levando em conta que para esses materiais, supercondutores de alta temperatura, ainda não existe teoria estabelecida).

As cerâmicas são constituídas por grãos e poderão ser modeladas por junções do tipo Josephson. No próximo capítulo serão introduzidos alguns conceitos que as envolvem.

## 5. INTRODUÇÃO A JUNÇÕES JOSEPHSON

Em 1962 o físico Josephson (JOSEPHSON, 1962) previu que a corrente supercondutora poderia tunelar entre dois supercondutores separados por uma barreira de potencial. Esta junção pode ser constituída de um isolante, ou de um metal normal ou ainda de um supercondutor. Algumas configurações são mostradas a seguir:

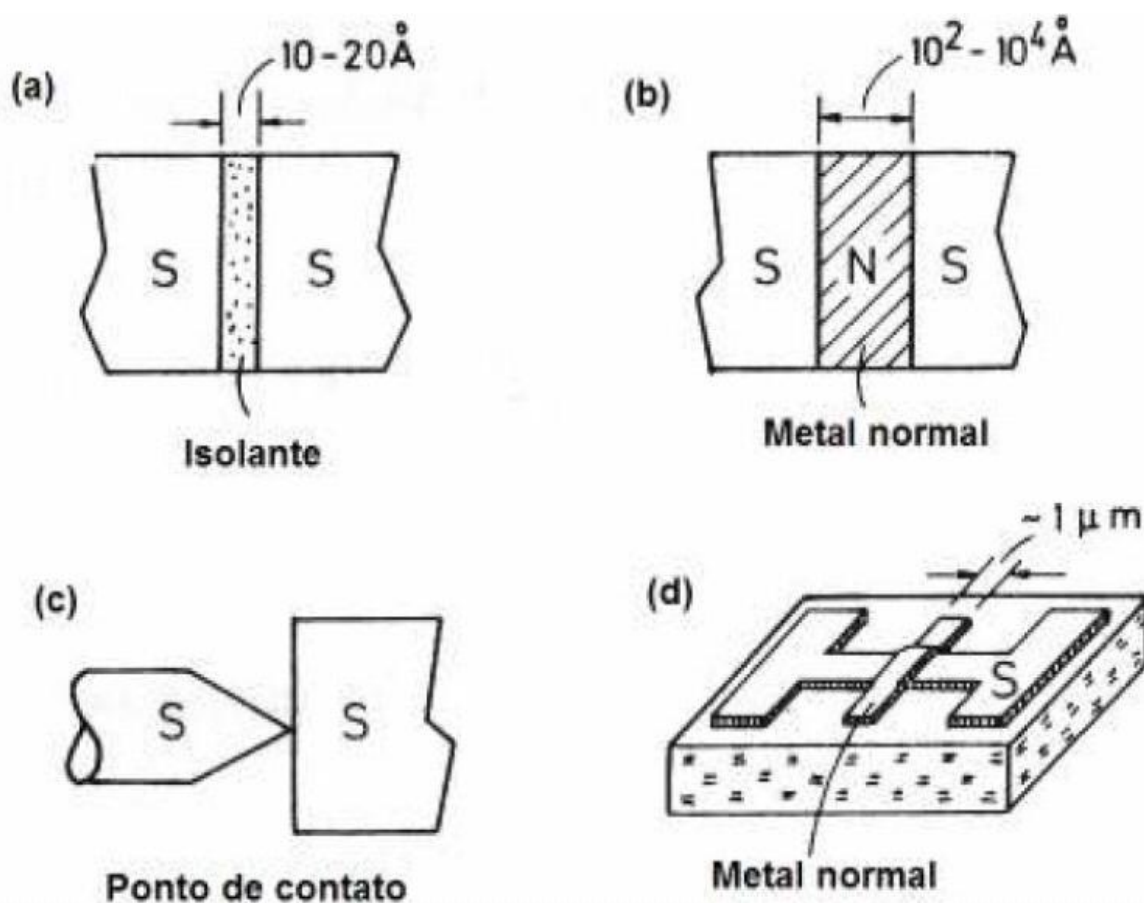


Figura 15: Junções Josephson a) S-I-S b) Tipo S-N-S c) Ponto de contato d) Tipo microponte (Bolzan, 2010)

O tunelamento dos pares de Cooper (ou quase-partículas) está ligado a sistemas fracamente acoplados e foi observado pela primeira vez por Anderson e Rowell em 1963, este fenômeno pode ser modelado pelas equações de Josephson.

### 5.1 Transformação de Calibre e a Densidade de Corrente Supercondutora

Definindo:

$$\psi = |\psi| \cdot e^{i\phi}, \quad 5.1$$

$$|\rho|^{1/2} = |\psi|, \quad 5.2$$

Em que  $\phi$  é a fase comum a todas as partículas e não será desprezada, já que o interesse não é apenas na intensidade (parte real). E  $\rho$  é a densidade real no macroestado  $|S\rangle$ .

$$\langle S|\psi^*\psi|S\rangle = \rho, \quad 5.3$$

$$\psi = |\rho|^{1/2} \cdot e^{i\phi}. \quad 5.4$$

No capítulo anterior foi explicado que os pares de Cooper são os responsáveis pela densidade de corrente supercondutora. Então se substituir (3.125) e (3.126) nas equações (3.124) e (3.130), que ficarão respectivamente:

$$\vec{J}_S = \frac{i\hbar e^*(\psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)}{2m^*} - \frac{(e^*)^2 \vec{A} |\psi|^2}{m^*}, \quad 5.5$$

$$\vec{J}_S = \frac{e^* |\psi|^2 (\hbar \vec{\nabla} \phi - 2e\vec{A})}{m^*}. \quad 5.6$$

Na ausência de campo elétrico na junção, a fase  $\phi$  é independente do tempo. Porém quando há campo é preciso fazer uma transformação de calibre, usando uma função arbitrária de valor único,  $X = X(\vec{r}, t)$ , assim a transformação ficará (KETTERSON, 1999):

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} X, \quad 5.7$$

$$V \rightarrow V - \frac{\partial X}{\partial t}. \quad 5.8$$

Então a eq. (5.6) fica sendo:

$$\vec{J}_S = \frac{i\hbar e^*(\psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)}{2m^*} - \frac{(e^*)^2 |\psi|^2 \vec{A}}{m^*} - \frac{(e^*)^2 |\psi|^2 \vec{\nabla} X}{m^*}. \quad 5.9$$

Contudo a densidade de corrente ( $\vec{J}_S$ ) não pode variar com a transformação de calibre e para isso é necessário acrescentar um termo na fase:

$$\phi \rightarrow \phi + \varphi, \quad 5.10$$

(5.10) em (5.1):

$$\psi = |\psi| \cdot e^{i(\phi + \varphi)}. \quad 5.11$$

Substituindo (5.11) em (5.9):

$$\vec{J}_S = \frac{i\hbar e^*(|\psi|^2 e^{i(\phi + \varphi)} \vec{\nabla} e^{-i(\phi + \varphi)} - |\psi|^2 e^{-i(\phi + \varphi)} \vec{\nabla} e^{i(\phi + \varphi)})}{2m^*} - \frac{(e^*)^2 |\psi|^2 (\vec{A} + \vec{\nabla} X)}{m^*}, \quad 5.12$$

$$\vec{J}_S = \frac{i\hbar e^* |\psi|^2 \left( -i\vec{\nabla}(\phi + \varphi) - i\vec{\nabla}(\phi + \varphi) \right)}{2m^*} - \frac{(e^*)^2 |\psi|^2 (\vec{A} + \vec{\nabla}X)}{m^*}, \quad 5.13$$

considerado que a derivada da soma é igual à soma da derivada, tem-se:

$$\vec{J}_S = \frac{\hbar e^* |\psi|^2 (\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\varphi)}{m^*} - \frac{(e^*)^2 |\psi|^2 (\vec{A} + \vec{\nabla}X)}{m^*}, \quad 5.14$$

$$\vec{J}_S = \frac{\hbar e^* |\psi|^2}{m^*} \left\{ \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\varphi - \frac{e^* \vec{A}}{\hbar} - \frac{e^* \vec{\nabla}X}{\hbar} \right\}. \quad 5.15$$

Comparando (5.6) com (5.15),  $\vec{J}_S$  deve ser invariante, assim:

$$\vec{\nabla} \left( \varphi - \frac{Xe^*}{\hbar} \right) = \vec{0}, \quad 5.16$$

$$\varphi - \frac{Xe^*}{\hbar} = \text{cte}. \quad 5.17$$

Esta constante pode ser zero, já que valores constantes somados na fase não afetam os resultados dos observáveis, ou seja, implicam em valores diferentes de fase (BARONE, 1982). Logo,

$$\varphi = \frac{Xe^*}{\hbar}, \quad 5.18$$

as equações (5.10) e (5.11) ficam respectivamente:

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{Xe^*}{\hbar}, \quad 5.19$$

$$\psi(\vec{r}, t) = |\psi| \cdot e^{i(\phi + \frac{Xe^*}{\hbar})}. \quad 5.20$$

Comparando (5.8) com a (5.19), pela invariância de calibre, conclui-se que:

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{Ve^*}{\hbar} = 0}. \quad 5.21$$

Pode-se escrever a função como

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot \psi(t), \quad 5.22$$

um dos termos da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = E\psi(\vec{r}, t), \quad 5.23$$

$$\psi(\vec{r}) \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{-iE\psi(\vec{r}) \cdot \psi(t)}{\hbar}, \quad 5.24$$

Resolvendo a equação diferencial obtemos:

$$\ln(\psi(t)) = \text{cte} + \frac{-iE}{\hbar} t, \quad 5.25$$

$$\psi(t) = e^{\text{cte}} \cdot e^{(-iE/\hbar)t}. \quad 5.26$$

Para  $\psi(t)$  ser normalizada:

$$e^{cte} = 1. \quad 5.27$$

Além disso conforme esclarecido no capítulo 4 que a energia mínima para adicionar um par de Cooper ao sistema é dada por:

$$E = 2\mu, \quad 5.28$$

Trocando (5.27) e (5.28) em (5.26):

$$\psi(t) = e^{(-i2\mu/\hbar)t}, \quad 5.29$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot e^{(-i2\mu/\hbar)t}. \quad 5.30$$

Que é a função de onda dos pares de Cooper.

## 5.2 Corrente de Tunelamento

A partir da teoria microscópica BCS (capítulo 4) sabe-se que a energia da quase partícula é governada pela eq. (4.41), manipulando-a obtém-se:

$$\epsilon_k = \sqrt{E_k^2 - \Delta_k^2}. \quad 5.31$$

Já a relação entre as densidades do estado supercondutor ( $N(E_k)$ ) com a densidade do estado do metal normal ( $\mathfrak{N}(\epsilon_k)$ ) é dada por (BARONE, 1982):

$$N(E_k)dE_k = \mathfrak{N}(\epsilon_k)d\epsilon_k, \quad 5.32$$

$$N(E_k) = \mathfrak{N}(\epsilon_k) \frac{d\epsilon_k}{dE_k}. \quad 5.33$$

Usando a regra da cadeia, de (5.31) é obtido:

$$\frac{d\epsilon_k}{dE_k} = \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 - \Delta_k^2}} - \frac{\Delta_k}{\sqrt{E_k^2 - \Delta_k^2}} \cdot \frac{d\Delta_k}{dE_k}. \quad 5.34$$

Na aproximação em que o gap é independente da energia:

$$\frac{d\Delta_k}{dE_k} = 0. \quad 5.35$$

Próximo da energia de Fermi ( $\epsilon_f$ ), ( $\epsilon_k = 0$ ), e a densidade de estado no metal normal fica constante:

$$\mathfrak{N}(\epsilon_k) = N(0), \quad 5.36$$

substituindo (5.35) em (5.34):

$$\frac{d\epsilon_k}{dE_k} = \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 - \Delta_k^2}}. \quad 5.37$$



Alterando (5.36) e (5.37) em (5.33):

$$N(E_k) = N(0) \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 - \Delta_k^2}}. \quad 5.38$$

Pode-se concluir que:

$$\begin{cases} N(E_k) = 0 \text{ se } |E_k| < \Delta_k \rightarrow \text{n\~ao h\'a energia suficiente para formar o pares} \\ N(E_k) = N(0) \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 - \Delta_k^2}} \text{ se } |E_k| \geq \Delta_k \rightarrow \text{formando pares} \end{cases}, \quad 5.39$$

Se o fator de Fermi \u00e9 dado por:

$$f(E_k) = (1 + e^{\beta E_k})^{-1}, \quad 5.40$$

ent\u00e3o para dois supercondutores a corrente de tunelamento ( $I_{L \rightarrow R}$ ) do supercondutor da esquerda ( $S_L$ ) para o da direita ( $S_R$ ), deve ser proporcional ao n\u00famero de pares Cooper dispon\u00edveis do ( $S_L$ ) (estados cheios),  $N_L(E_k)f_L(E_k)$ , proporcional ao n\u00famero de estados poss\u00edveis do ( $S_R$ ) (fra\u00e7\u00e3o de estados vazios),  $N_R(E_k)(1 - f_R(E_k))$  e somado a isso ( $I_{L \rightarrow R}$ ) deve tamb\u00e9m ser proporcional \u00e0 probabilidade do tunelamento ocorrer, ou seja:

$$I_{L \rightarrow R} \propto \int_{-\infty}^{\infty} |T|^2 N_L(E_k) f_L(E_k) N_R(E_k) (1 - f_R(E_k)) dE_k. \quad 5.41$$

Analogamente para o supercondutor da direita para o da esquerda:

$$I_{R \rightarrow L} \propto \int_{-\infty}^{\infty} |T|^2 N_R(E_k) f_R(E_k) N_L(E_k) (1 - f_L(E_k)) dE_k. \quad 5.42$$

Assumindo  $|T|$  independente da energia. A corrente resultante ( $I$ ) ser\u00e1 dada por:

$$I_{SS} = I_{L \rightarrow R} - I_{R \rightarrow L} \propto |T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} N_L(E_k) N_R(E_k) (f_L(E_k) - f_R(E_k)) dE_k. \quad 5.43$$

Se for aplicado uma diferen\u00e7a de potencial ( $V$ ) na jun\u00e7\u00e3o ent\u00e3o a diferen\u00e7a de energia ser\u00e1 dada por ( $eV$ ).

Usando este fato e substituindo (5.38) em (5.43):

$$I_{SS} = \text{cte} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 - \Delta_{kL}^2}} \frac{E_k}{\sqrt{(E_k + eV)^2 - \Delta_{kR}^2}} (f_L(E_k) - f_R(E_k + eV)) dE_k. \quad 5.44$$

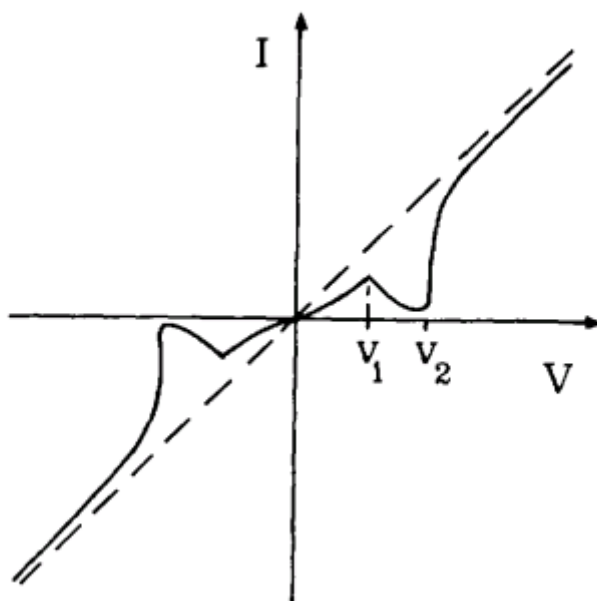


Figura 16: Gráfico da corrente de tunelamento por uma diferença de potencial para dois supercondutores distintos (BARONE, 1982).

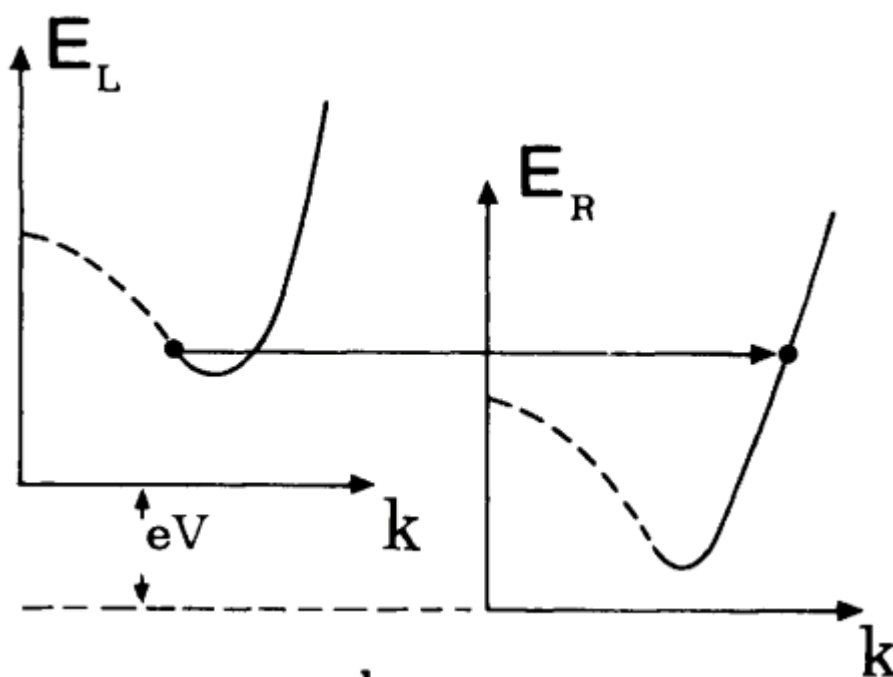


Figura 17: Tunelamento da quase-partícula (BARONE, 1982).

### 5.3 As Equações de Josephson

Lembrando-se da eq. (3.105) e fazendo a substituição nela a eq. (3.126), obtém-se:

$$(-i\hbar\vec{\nabla} - e^*\vec{A})\psi\hat{n} = 0. \quad 5.45$$

Que equivale à ausência de fluxo de corrente através dos limites do supercondutor. Quando houver uma junção de dois supercondutores e uma fina camada isolante entre esses supercondutores, pela qual os pares podem tunelar, formando-se um sistema, supercondutor isolante supercondutor ( $S_L - I - S_R$ ). Este pode ser considerado como um supercondutor único.

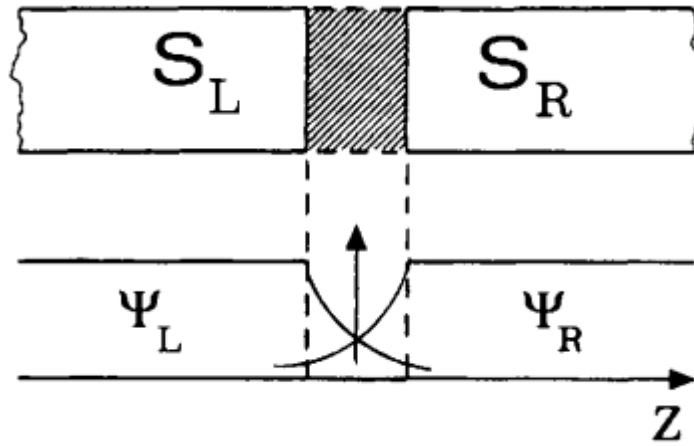


Figura 18: Junção Josephson ( $S_L - I - S_R$ )  
(BARONE, 1982)

As condições de contorno macroscópica limite para que haja corrente de tunelamento fluindo paralelamente a  $\hat{n}$  numa interface entre dois materiais diferentes, é preciso modificar (5.45) e (5.5) para se obter respectivamente (KETTERSON e SONG, 1999):

$$(-i\hbar\vec{\nabla} - e^*\vec{A})\psi_L\hat{n} = \frac{\psi_R}{b}, \quad 5.46$$

$$(-i\hbar\vec{\nabla} - e^*\vec{A})\psi_R\hat{n} = -\frac{\psi_L}{b}, \quad 5.47$$

$$\vec{j}_S = \frac{i\hbar e^*(\psi_L \cdot \vec{\nabla} \psi_L^* - \psi_L^* \vec{\nabla} \psi_L)}{2m^*} - \frac{(e^*)^2 |\psi_L|^2 \vec{A}}{m^*}. \quad 5.48$$

$b$  é representa um parâmetro constate das novas condições de contorno. Supondo  $\hat{n}$  paralelo ao  $\hat{z}$  então:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi_L}{\partial z} - e^* A_z \psi_L = \frac{\psi_R}{b}, \quad 5.49$$

$$\frac{\partial \psi_L}{\partial z} - \frac{ie^* A_z \psi_L}{\hbar} = \frac{\psi_R}{\lambda}, \quad 5.50$$

$$\frac{\partial \psi_L^*}{\partial z} + \frac{ie^* A_z \psi_L^*}{\hbar} = \frac{\psi_R^*}{\lambda^*}. \quad 5.51$$

$\lambda = -i\hbar b$ , e por sua vez também um parâmetro constante. De (5.48):

$$J_{Sz} = \frac{i\hbar e^*}{2m^*} \left( \psi_L \cdot \frac{\partial \psi_L^*}{\partial z} - \psi_L^* \frac{\partial \psi_L}{\partial z} \right) - \frac{(e^*)^2 |\psi_L|^2 A_z}{m^*}. \quad 5.52$$

Substituindo (5.50) e (5.51) em (5.53):

$$J_{Sz} = \frac{i\hbar e^*}{2m^*} \left( \psi_L \cdot \left\{ \frac{\psi_R^*}{\lambda^*} - \frac{ie^* A_z \psi_L^*}{\hbar} \right\} - \psi_L^* \cdot \left\{ \frac{\psi_R}{\lambda} + \frac{ie^* A_z \psi_L}{\hbar} \right\} \right) - \frac{(e^*)^2 |\psi_L|^2 A_z}{m^*}. \quad 5.53$$

As equações (5.50) e (5.51) são gerais, então são válidas para o caso particular que não há campo magnético ( $\vec{B}$ ). Na ausência desse campo os supercondutores preservam a inversão temporal. Por consequência desse fato, quando se faz a troca  $\psi \rightarrow \psi^*$  e  $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$  em (5.50), o resultado tem que ser igual a eq. (5.51). Para que isso ocorra,  $\lambda$  tem que ser real. Consequentemente  $b$  tem que ser puramente complexo, (KETTERSON e SONG, 1999) dessa forma:

$$\lambda = \lambda^*, \quad 5.54$$

$$J_{Sz} = \frac{i\hbar e^* (\psi_L \cdot \psi_R^* - \psi_L^* \psi_R)}{2m^* \lambda} + \frac{\hbar (e^*)^2 A_z (\psi_L \psi_L^* + \psi_L^* \psi_L)}{2m^*} - \frac{(e^*)^2 |\psi_L|^2 A_z}{m^*}, \quad 5.55$$

$$J_{Sz} = \frac{i\hbar e^* (\psi_L \cdot \psi_R^* - \psi_L^* \psi_R)}{2m^* \lambda}. \quad 5.56$$

De (5.1):

$$\psi_L = |\psi_L| \cdot e^{i\phi_L}, \quad 5.57$$

$$\psi_R = |\psi_R| \cdot e^{i\phi_R}. \quad 5.58$$

Se os supercondutores da esquerda e da direita forem do mesmo material tem-se:

$$|\psi_L| = |\psi_R| = |\psi|. \quad 5.59$$

Alterando (5.57), (5.58) e usando o fato (5.59) em (5.56):

$$J_{Sz} = \frac{i\hbar e^* (|\psi|^2 e^{i(\phi_L - \phi_R)} - |\psi|^2 e^{-i(\phi_L - \phi_R)})}{2m^* \lambda}. \quad 5.60$$

Utilizando a fórmula de Euler para a relação entre a exponencial e as funções trigonométricas, obtém-se:

$$J_{Sz} = \frac{i\hbar e^* |\psi|^2}{2m^* \lambda} (\cos(\phi_L - \phi_R) + i \sin(\phi_L - \phi_R) - \{\cos(\phi_L - \phi_R) - i \sin(\phi_L - \phi_R)\}). \quad 5.61$$

$$J_{Sz} = \frac{i\hbar e^* |\psi|^2}{2m^* \lambda} (-2i \sin(\phi_R - \phi_L)), \quad 5.62$$

$$J_{Sz} = \frac{\hbar e^* |\psi|^2}{m^* \lambda} (\sin(\phi_R - \phi_L)). \quad 5.63$$

Pra isso, foi usado o fato que  $\sin(\phi_L - \phi_R) = -\sin(\phi_R - \phi_L)$ .

Definindo a densidade de corrente máxima que pode passar pela junção como sendo  $J_m$  :

$$J_m = \frac{i\hbar e^* |\psi|^2}{m^* \lambda}. \quad 5.64$$

Logo a eq. (5.62) fica:

$$J_{Sz} = J_m \sin(\phi_R - \phi_L). \quad 5.65$$

Definindo:

$$\phi = \phi_R - \phi_L \quad 5.66$$

$$\boxed{J_{Sz} = J_m \sin \phi}. \quad 5.67$$

Usando as transformações (5.7), (5.8) e integrando a equação (5.21):

$$\phi = \int \frac{Ve^*}{\hbar} dt, \quad 5.68$$

$$\phi = \phi_0 + \frac{Ve^*}{\hbar} t, \quad 5.69$$

$$\boxed{J_{Sz} = J_m \sin \left( \phi_0 + \frac{Ve^*}{\hbar} t \right)}. \quad 5.70$$

Isto é chamado do efeito Josephson ac. No qual:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega = \frac{Ve^*}{\hbar}, \quad 5.71$$

ou seja:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{Ve^*}{\hbar}. \quad 5.72$$

A densidade de corrente de tunelamento em uma junção S-I-S (supercondutor, isolante e supercondutor) é regida pelas equações (5.67) e (5.70).

As cerâmicas supercondutoras (ex. Hg, Re- 1223, estudada no grupo de Física Aplicada) são constituídas de grãos interpenetrantes que formam um conjunto de microjunções Josephson (os “weak-links”). Visto isso, pode-se usar os conceitos deste tipo de junção para descrever os processos físicos microscópicos envolvidos nos supercondutores de altas temperaturas.

## 6. CONCLUSÕES

Por intermédio da concretização desse trabalho foi possível entender que, um material estar no estado supercondutor não é o mesmo que ter condutividade perfeita. Isto porque, para uma amostra supercondutora o campo magnético em seu interior é sempre nulo, independente das condições iniciais. Esse fato foi explicitado pela primeira vez por intermédio do eletromagnetismo clássico (teoria dos irmãos London). No entanto, anos depois, foi criada uma teoria que além de obter as equações de London, de forma natural ao minimizar um funcional de energia dependente de um parâmetro de ordem, elucidada nas transições de fase supercondutora (Teoria de Ginzburg-Landau).

O estado supercondutor é estável, e tem uma densidade de energia de condensação dada por:

$$g_n(T, 0) - g_s(T, 0) = \mu_0 \frac{\bar{H}_c^2}{2}, \quad 6.1$$

esta é dependente de um parâmetro de ordem.

Nos supercondutores isolados não há fuga de fluxo de corrente:

$$(-i\hbar\vec{\nabla} - e^*\vec{A})\psi = 0, \quad 6.2$$

E a densidade de corrente supercondutora é dada por:

$$\vec{J}_s = \frac{i\hbar e^*(\psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)}{2m^*} - \frac{(e^*)^2 |\psi|^2 \vec{A}}{m^*} \quad 6.3$$

O parâmetro de ordem é proporcional à densidade dos portadores de cargas e estes são formados pela interação positiva entre os elétrons vestidos que compõem os pares de Cooper. Porém a supercondutividade também pode ser interpretada como a interação entre as quase partículas, isto numa visão microscópica.

É possível verificar que assim como nos metais normais, existe corrente de tunelamento entre os supercondutores. E a densidade de corrente de tunelamento AC é regida pela equação:

$$J_{sx} = J_m \sin\left(\phi_0 + \frac{Ve^*}{\hbar}t\right) \quad 6.4$$

Como ainda não existe uma teoria que modele os supercondutores policristalinos de alta temperatura crítica, utiliza-se o fato desse tunelamento para modelar as cerâmicas como se fossem vários micro-supercondutores unidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANNETT, James F.; **Superconductivity, Superfluids and Condensates**. University Press, Oxford (2003)

ASHCROFT, Neil W.; MERMIN N. David. **Física do Estado Sólido**. (Cengage Learning, 2011)

BARONE, Antonio. **Physics and Applications of the Josephson Effects**. (John Wiley & Sons, Inc. 1982)

BOLZAN, Márcio de Souza. **Modelagem Computacional da Corrente Crítica em Supercondutores Policristalinos do tipo HgRe1223**. (Dissertação de mestrado do programa de pós-graduação em física da Universidade Federal do Espírito santo, 2010)

BARDEEN, J., COOPER, L. N., e SCHRIEFFER, J. R. **Microscopic theory of superconductivity**. Physical Review, 106(1), 162-164. (1957)

FUJITA, Shigeji; ITO, Kei; GODOY, Salvador. **Quantum Theory of Superconducting Matter – Superconductivity**. Springer (2009).

GINZBURG, Vitaley Lazarevich; LANDAU, Lev Davidovich; Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 20, 1064 (1950).

GOR'KOV, L. P. **Microscopic Derivation of the Ginzburg-Landau Equations In The Theory of Superconductivity**. Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 36. 1918 (1959) [Sov. Phys. JETP 9, 1364 (1959)].

GORTER, Cornelis Jacobus; CASIMIR, Hendrik Brugt Gerhard. **On supraconductivity I**. Physica, v. 1, p. 306-320 (1934). [Phys. Z. v. 35, p. 963-936, 1934].

JOSEPHSON, B. D. **Possible new effects in superconductive tunneling**. (PhysicsLetters., v. 1, p. 251, 1962)



KETTERSON, J. B.; SONG, S. N. **Superconductivity**. (Cambridge University press, 1999)

LONDON, Fritz. LONDON, Heinz. **The electromagnetic equations of the superconductor**. Proc. Roy. Soc., v. A 141, p. 71-88 (Março 1935).

LONDON, Fritz. **Superfluids**, vol. I, Wiley, New York (1950).

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do eletromagnetismo**, v. II Ponta Grossa: UEPG (2002).

MEISSNER, Walter; OCHSENFELD, Robert. **Magnetic effects of a rotating superconductor**. Naturwissenschaft, v. 21, p. 787-788 (Abril 1933).

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Eletromagnetismo Curso de Física Basica**, I Edição, São Paulo, Edgard Blücher (1997)

ONNES, Heike Kamerlingh. **Communications**. Leiden 120b, 122b, 124c (1911).

ORLANDO, Terry P.; DELIN, Kevin A. **Foundations of Applied Superconductivity**, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company (1990)

OSTERMANN, Fernanda; FERREIRA, Letícia Mendonça; CAVALCANTI, Cláudio J. Holanda. **Tópicos de Física Contemporânea no Ensino Médio: um Texto para Professores sobre Supercondutividade**. Revista Brasileira de Ensino de Física v. 20, no. 3, (Setembro 1998).

POOLE, P. C. **Superconductivity**. (Academic Press, Inc., 1995).

ROSE-INNES, A. C. P.; RHODERECK, E. H. **Introduction to superconductivity**, Oxford, Pergamon (1988)

TIDECKS, R. **Current Induced Nonequilibrium Phenomena in Quasi-One-Dimensional Superconductors**. (Springer-Verlog, 1990)

TINKHAM, Michael. **Introduction to Superconductivity**. (McGraw-Hill, Inc, 1996)